1 이변수 벡터함수 $\Phi : D^* = [0,2] \times [0,3] \to \mathbb{R}^2$가 다음과 같이 주어졌을 때, 아래 물음에 답하시오.

$$\Phi(u,v) = (3u+v,\, u+v)$$

(a) $(x,y) = \Phi(u,v)$라 두었을 때, 야코비 행렬식 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$의 값을 구하시오.

(b) (x,y)의 집합 $\Phi(D^*)$가 어떤 도형인지 서술하시오.

(c) $\displaystyle\iint_{\Phi(D^*)} xy\, dxdy$ 의 값을 구하시오.

2 이변수 벡터함수 $\Phi : D^* = [0,1] \times [1,2] \to \mathbb{R}^2$가 다음과 같이 주어졌다.

$$\Phi(u,v) = (u^2 - v^2,\, 2uv)$$

(a) $(x,y) = \Phi(u,v)$라 두었을 때, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$의 값을 구하시오.

(b) $\displaystyle\iint_{\Phi(D^*)} 5x\, dxdy$ 의 값을 구하시오.

3 삼변수 벡터함수 $\Phi : D^* = [-1,0] \times [-1,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$가 다음과 같이 주어졌다.

$$\Phi(u,v,w) = (3u+2v+w,\, u-w,\, 4v-2w)$$

(a) $(x,y,z) = \Phi(u,v,w)$라 두었을 때, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$의 값을 구하시오.

(b) $\displaystyle\iiint_{\Phi(D^*)} y\, dxdydz$의 값을 구하시오.

아래의 물음에 답하시오. 일대일 대응 $(u,v) \mapsto (x,y)$가 임의의 점 $P_0 = (u_0, v_0)$에서 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P_0) \neq 0$을 만족하면 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$임을 이용해도 좋습니다.

4 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \le x - 2y \le 2 \text{ 이고 } -1 \le x + y \le 2\}$일 때, 이중적분 $\displaystyle\iint_D (2x-y)dxdy$ 의 값을 구하시오.

5 $\mathbb{R}^2$의 네 점 $(0,0)$, $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 영역을 D라 할 때, $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$ 의 값을 구하시오.

(힌트: 필요하면 영역 D의 네 변을 각각 x, y의 방정식으로 나타내시오.)

6 (대칭성) 집합 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0\}$에 포함되는 기본 영역 D_1에 대해

$$D_2=\{(-x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\in D_1\},\qquad D=D_1\cup D_2$$

라 하자(D_2는 D_1을 y축에 대해 대칭시켜 얻은 집합). D에서 정의된 실함수 f,g가

$$\text{모든 } (x,y)\in D \text{ 에 대해 } \; f(-x,y)=f(x,y) \text{ 이고 } \; g(-x,y)=-g(x,y)$$

를 만족할 때, 적분의 가법성과 변수변환 공식을 이용하여 다음을 증명하시오.

(a) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$

(b) $\displaystyle\iint_D g(x,y)dxdy=0$

7 $\mathbb{R}^2$의 기본 영역의 넓이는 평행이동에 대해 불변임을 설명하시오.
(D^*가 기본 영역이고 $a,b\in\mathbb{R}$가 상수일 때, $\Phi(x,y)=(x+a,y+b)$ $((x,y)\in D^*)$이면 $\mathrm{area}(\Phi(D^*))=\mathrm{area}(D^*)$이다.)

8 xy 평면의 1사분면에서 두 곡선 $xy=1$, $xy=4$와 반직선 $y=3x$, $y=x$로 둘러싸인 유계 영역 D의 넓이를 구하시오. (힌트: $u=xy$, $v=y/x$로 치환)