

1 주어진 함수의 임계점을 모두 구하고 임계점의 종류를 판별하시오.

(a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

(b) $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$

(c) $f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$

(d) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^3 - 6x$

(e) $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

2 $a \in \mathbb{R}$ 가 상수일 때 \mathbb{R}^2 에서 다음과 같이 정의된 함수 f 를 생각하자.

$$f(x, y) = x^2 + axy + y^2$$

(a) 함수 f 가 오직 하나의 임계점을 가질 때 a 의 범위를 구하시오.

(b) 함수 f 가 오직 하나의 임계점을 가진다고 하자. 이 임계점이 f 의 극소점이 되는 경우와 안장점이 되는 경우에 해당하는 a 의 범위를 각각 구하시오.

(힌트: x, y 의 연립방정식 $\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ 이 $x = y = 0$ 이외의 해를 가지는 것과 $ad - bc = 0$ 은 동치입니다.)

3 xy 평면의 타원판 $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ 을 정의역으로 하는 함수

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$$

의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오. 그리고 최대점과 최소점도 같이 구하시오.

(힌트: 필요하면 정의역의 경계 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 을 적절히 매개화하시오.)

4 xy 평면에서 x 축과 두 직선 $x = 4$, $y = x$ 로 둘러싸인 유계(bounded) 삼각형 영역에서 다음과 같이 정의된 이변수 함수 f 의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y$$

그리고 f 의 최대점과 최소점도 각각 구하시오.