1 주어진 영역에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}$와 실함수 θ에 대해 θ가 $\mathbf{F}$의 포텐셜 함수임을 보이시오.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right), \quad x>0, \quad \theta(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(b) $\mathbf{F}(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right), \quad y>0, \quad \theta(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{-x}{y}\right) + \dfrac{\pi}{2}$

2 실함수 f가 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능할 때, 영역 $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z>0\}$에서 다음 벡터장이 보존적임을 보이시오.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \langle f(r)x,\, f(r)y,\, f(r)z\rangle, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad (x,y,z) \in D$$

(포텐셜 함수를 구할 필요는 없습니다. 연쇄법칙을 사용하세요.)

3 주어진 영역에서 아래와 같이 정의된 벡터장 $\mathbf{F}$가 보존적인지 판정하고, 보존장일 경우 $\mathbf{F}$의 포텐셜 함수를 구하시오.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = \langle -y,\, x\rangle, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(b) $\mathbf{F}(x,y) = \langle -y^2\sin x,\, 2y\cos x\rangle, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle y^2,\, xy+z^2,\, yz\rangle, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle z - y\sin(xy),\, -x\sin(xy) + z\cos(yz),\, x + y\cos(yz)\rangle, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

4 다음 선적분에 주어진 벡터장의 포텐셜 함수를 구하고, 선적분의 값을 구하시오.

(a) $\displaystyle\int_C (4x+3y)dx + (3x+2y)dy$, 곡선 C는 타원 $3x^2+4y^2 = 12$를 따라 점 $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$부터 $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$까지 이동하는 부분.

(b) $\displaystyle\int_C (3x^2y^2z + z^3)dx + 2x^3yz\,dy + (x^3y^2 + 3xz^2)dz$,
C는 점 $(1,-1,2)$에서 출발하여 점 $(2,-3,1)$에 도착하는 매끄러운 곡선

(c) $\displaystyle\int_C e^x \sin y\,dx + (e^x\cos y + e^y\cos z)dy - e^y\sin z\,dz$,
$C(t) = (\pi\cos t,\, \pi\sin t,\, t) \quad (0 \le t \le 3\pi)$

5 $\mathbb{R}^2$에서 미분가능한 이변수 함수 f, g에 대해 다음 벡터장이 $\mathbb{R}^3$에서 보존적이다. 이때 $f(y,z)$, $g(x,z)$의 식을 모두 구하시오.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(y,z)\,\mathbf{i} + g(x,z)\,\mathbf{j} + 3xyz^2\,\mathbf{k}$$