1 $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$이고, $x(t) = t+1,\ \ y(t) = t^2+1$일 때

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=1} f(x(t), y(t))$$

의 값을 다음 두 가지 방법으로 따로 구하시오.

(a) 2변수 함수의 연쇄법칙을 사용하여

(b) $f(x(t), y(t))$를 t의 식으로 나타낸 뒤, 이를 t로 직접 미분하여

2 $f(x,y,z) = xy+2yz+3zx$ 이고 $\mathbf{G}(s,t) = (s+t,\ st,\ s-t)$일 때 연쇄법칙을 이용하여 $\dfrac{\partial}{\partial s}(f \circ \mathbf{G})(s,t)$와 $\dfrac{\partial}{\partial t}(f \circ \mathbf{G})(s,t)$를 s와 t의 식으로 각각 나타내시오.

3 2변수 함수 $f = f(x,y)$의 2계 편도함수가 모두 존재하고 이들이 $\mathbb{R}^2$에서 연속이라 하자. 그리고 f는 다음 등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} &f_x(1,-2) = -2, \quad f_y(1,-2) = 3, \\ &f_{xx}(1,-2) = -5, \quad f_{xy}(1,-2) = 4, \quad f_{yy}(1,-2) = 2. \end{aligned}$$

$\phi(u,v) = f(2u-v,\ -3u+v)$라 할 때 위의 정보를 이용하여

(a) $\phi_u(1,1)$과 $\phi_v(1,1)$의 값을 구하시오.

(b) $\phi_{uv}(1,1)$과 $\phi_{vv}(1,1)$의 값을 구하시오.

4 $\mathbb{R}^2$에서 미분가능한 함수 $u = u(x,y)$에 대해 $U(r,\theta) = u(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$라 할 때

$$\Big((U_r)^2 + \frac{1}{r^2}(U_\theta)^2\Big)(r,\theta) = \Big((u_x)^2 + (u_y)^2\Big)(x,y), \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

임을 보이시오.

5 집합 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + xy^2 + y^3 = 3\}$은 점 $(1,1)$ 근방에서 곡선이고, $(1,1)$에서 접선을 가진다고 한다. 이 접선의 방정식을 구하시오.

6 집합 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y - y^2z + xz^4 = -3\}$은 점 $(2,-1,1)$ 근방에서 $z = f(x,y)$의 형태로 표현되고, f는 평면의 점 $(2,-1)$에서 미분가능하다고 한다.
음함수의 미분을 이용하여 $f_x(2,-1)$과 $f_y(2,-1)$의 값을 각각 구하시오.