1 두 벡터 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 와 $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ 와 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 를 각각 구하여라.

(b) 벡터 $\mathbf{a}$와 같은 방향의 단위벡터를 구하여라.

2 $\mathbb{R}^3$의 두 점 $P(1, -2, -3)$ 과 $Q(2, 4, 1)$ 에 대하여 벡터 $\overrightarrow{PQ}$ 의 방향코사인을 모두 구하여라.

3 $\mathbb{R}^3$의 두 점 $P(2, -3, 1)$, $Q(1, 0, -1)$ 에 대해 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$를 각각 $\mathbf{a} = \langle 1, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{PQ}$ 라 두고 다음 물음에 답하여라.

(a) 일정한 힘 $\mathbf{a}$에 의해 어떤 입자가 점 P부터 Q까지 이동했을 때, 힘 $\mathbf{a}$가 이 입자에 한 일(work)을 구하여라.

(b) 벡터 $\mathbf{a}$의 $\mathbf{b}$ 성분 $\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ 의 값을 구하여라.

(c) 벡터 $\mathbf{a}$를 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$ 으로 나타내고자 한다. 여기에서 벡터 $\mathbf{a}_{\parallel}$ 는 $\mathbf{b}$에 평행하고, $\mathbf{a}_{\perp}$는 $\mathbf{b}$에 수직이다. $\mathbf{a}_{\parallel}$와 $\mathbf{a}_{\perp}$의 식을 각각 구하여라.

4 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$에 대해 다음의 등식을 증명하여라.

(a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$

(b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

5 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$에 대해 Cauchy-Schwarz 부등식

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

을 증명하고, 등호가 성립하는 경우를 모두 밝혀라.

6 임의의 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$에 대하여 삼각부등식

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

가 성립함을 증명하고, 등호가 성립하는 경우를 모두 밝혀라. 필요하면 Cauchy-Schwarz 부등식을 이용해도 좋다.