2017년도 일반수학1 기말고사 답안지

단답식: 1번은 문항당 2점이고 4번은 수렴반지름=2점, 수렴구간=3점을 부여함

1. a) 발산 b) 수렴 c) 발산 d) 발산 e) 수렴

2, $y = -x + \sqrt{2}$

3. $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 수렴반지름 = 2 (2점) 수렴구간= (-1,3) (3점)

5. $x - 3x^2 + \frac{26}{3}x^3$

6. $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$

7. -1

8. 8

9. $\ln 2$

주관식

10. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n^2}$의 절대수렴, 조건수렴, 발산을 판정하여라.

풀이) 주어진 급수는 절대수렴하는 급수임을 보이고자 한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{1+n^2}$이 수렴함을 보이기 위해 적분판정법을 이용한다.

위 급수에 대응하는 특이적분 $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$이 수렴함을 보이기 위해 다음 부등식

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx < \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$$ 을 이용한다.

이제 후자의 특이적분은 다음과 같이 수렴함을 알 수 이다.

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^{M} \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx = \lim_{M\to\infty}\{-\frac{\ln(1+M)}{M} + \ln(\frac{M}{1+M}) + 2\ln 2\}$$

$= 2\ln 2$ (여기서 위의 정적분은 부분적분법을 이용함)

따라서 특이적분 $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$이 수렴하므로 적분판정법에 의해 주어진 급수는 절대수렴 한다.

11. 극방정식으로 주어진 곡선 $r = \frac{1}{\theta}$ $(1 \le \theta \le \sqrt{3})$의 길이를 구하여라.

풀이) $l = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^4}}\, d\theta$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\theta^2+1}}{\theta^2}\, d\theta$$

$$\theta = \tan u, \quad d\theta = \sec^2 u du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\tan^2 u + 1}}{\tan^2 u} \sec^2 u du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec u}{\tan^2 u} \sec^2 u du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec u \csc^2 u du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec u (1 + \cot^2 u)\, du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec u + \csc u \cot u\, du$$

$$= [\ln|\sec u + \tan u| - \csc u]_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= \left[\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\right] - [\ln(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}]$$

$$= \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

12. 두 곡선 $y=\dfrac{x^2}{(x-2)(x^2+1)}$와 $y=\dfrac{1}{x-3}$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

풀이)

(풀이) 먼저 두 곡선의 교점을 구하면

$$\frac{x^2}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{1}{x-3} \Rightarrow x^2(x-3)=(x-2)(x^2+1) \Rightarrow x^3-3x^2=x^3-2x^2+x-2$$
$$\Rightarrow x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2,\ x=1$$

이다. $-2 \le x \le 1$에서

$$\frac{x^2}{(x-2)(x^2+1)}-\frac{1}{x-3}=\frac{x^2(x-3)-(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x-3)(x^2+1)}=\frac{x^3-3x^2-x^3+2x^2-x+2}{(x-2)(x-3)(x^2+1)}$$
$$=\frac{-x^2-x+2}{(x-2)(x-3)(x^2+1)}=\frac{-(x+2)(x-1)}{(x-2)(x-3)(x^2+1)}\ge 0$$

즉, 구간 $[-2,1]$위에서 $\dfrac{x^2}{(x-2)(x^2+1)}\ge\dfrac{1}{x-3}$이다. 따라서 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$S=\int_{-2}^{1}\left(\frac{x^2}{(x-2)(x^2+1)}-\frac{1}{x-3}\right)dx$$

이고, 피적분 함수인 유리함수의 부분분수 분해를 이용하여 다음과 같이 정적분을 구한다.

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-2}^{1}\left(\frac{x^2}{(x-2)(x^2+1)}-\frac{1}{x-3}\right)dx\\
&=\int_{-2}^{1}\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}-\frac{1}{x-3}\right)dx\ \ (A+B=1,\ C-2B=0,\ A-2C=0)\\
&=\int_{-2}^{1}\left(\frac{\frac{4}{5}}{x-2}+\frac{\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}}{x^2+1}-\frac{1}{x-3}\right)dx\\
&=\frac{4}{5}\left[\ln|x-2|\right]_{-2}^{1}+\frac{1}{10}\left[\ln(x^2+1)\right]_{-2}^{1}+\frac{2}{5}\left[\tan^{-1}x\right]_{-2}^{1}-\left[\ln|x-3|\right]_{-2}^{1}\\
&=-\frac{5}{2}\ln 2+\frac{9}{10}\ln 5+\frac{\pi}{10}-\frac{2}{5}\tan^{-1}(-2)\\
&=-\frac{5}{2}\ln 2+\frac{9}{10}\ln 5+\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\tan^{-1}2
\end{aligned}$$

13. 함수 $f(x)=\int_0^x t\ln(1+t^2)dt$의 매클로린 급수와 수렴구간을 각각 구하여라.

풀이) 피적분 함수 $f'(x)=x\ln(1+x^2)$의 메클로린 급수를 구하고 항별적분하여 주어진 함수 의 매클로린 급수를 구한다.

$|x|<1$일 때, $(\ln(1+x^2))'=\dfrac{2x}{1+x^2}=2x\dfrac{1}{1+x^2}=2x\dfrac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2x^{2n+1}$ 이므로

$\ln(1+x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2}+C_1$ 이다. 한편 $x=0$을 대입하면 $C_1=0$이다.

따라서, $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+3}$ 이고 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2(n+1)(n+2)}x^{2n+4}+C_2$ 이다.

$f(0)=0$이므로 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2(n+1)(n+2)}x^{2n+4}$이다.

f의 매클로린 급수에서 $\rho=1$이므로 $x=\pm 1$에서 교대급수판정법에 의해 두 급수는 모두 수렴하므로 수렴구간은 [-1,1]이다.

14. 두 타원 $3x^2+y^2=3$ 과 $x^2+3y^2=3$ 의 공통내부인 영역의 넓이를 극좌표를 이용하여 구하여라.

풀이) 두 타원은 역함수 관계에 있으므로 $y=x$ 에 대칭인 곡선들이다.

그러므로 1사분면에서 두 타원이 교차점의 편각 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이다

또한 (두 곡선의 내부는 x축 및 y축에 대칭)

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$을 이용하여 타원 $3x^2+y^2=3$의 극방정식을 구하여 정리하면

$$r^2=\frac{3}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{3}{(3+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta})\cos^2\theta}=\frac{3}{((\sqrt{3})^2+\tan^2\theta)}\sec^2\theta$$ 이다.

이제 공통부분의 영역의 넓이 A라고 두면, 영역의 대칭성에 의해

$$\frac{A}{8} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\times3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{((\sqrt{3})^2+\tan^2\theta)}\sec^2\theta\,d\theta$$ 이다.

따라서 $A=8\times\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{(\sqrt{3})^2+x^2}\,dx$ ($\tan\theta=x$)

$$=8\times\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1=8\times\frac{3}{2\sqrt{3}}tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6}=8\times\frac{\sqrt{3}}{12}\pi=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\pi.$$