

단답형)

1.  $-2$

2.  $-\frac{19}{5}$

3.  $\sqrt{13}$

4.  $\sqrt{3}x + y = 2.$

5.  $A=1$  ,  $B=\frac{1}{r^2}$

6.  $\frac{2e}{\sqrt{9e^2+4}}$

7.  $4\tan 5$

8.  $\frac{3}{4}$

9.  $\frac{70}{3}$

10.  $\frac{\sqrt{54}}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

11. 함수  $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y - 12x^2 - 3y^2$ 의 임계점을 모두 구하고, 임계점들을 판별하여라.

(풀이)

$\nabla f = \langle 6x^2 - 6xy - 24x, -3x^2 - 6y \rangle$  이므로 임계점은  $O(0,0), P(2,-2), Q(-4,-8)$  이다.

$$f_{xx} = 12x - 6y - 24, f_{xy} = -6x, f_{yy} = -6$$

$$\Delta = -36(2x - y - 4 + x^2)$$

(i)  $\Delta(0,0) = (-24)(-6) > 0$  이고  $f_{xx}(O) < 0$ 이므로  $O$ 에서 극대.

(ii)  $\Delta(P) < 0$  이므로  $P$ 에서 안장점.

(iii)  $\Delta(Q) < 0$ 이므로 안장점.

12. 두 직선  $l_1 : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  과  $l_2 : x = y - 2 = z$  사이의 최단거리를 구하여라.

(풀이) 직선  $l_1, l_2$ 의 방향벡터는 각각  $\vec{v}_1 = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ,  $\vec{v}_2 = \langle 1, 1, 1 \rangle$  이다.

(1)  $\vec{v}_1 = t\vec{v}_2$  인 실수  $t$ 가 존재하지 않으므로 두 직선은 평행이 아니다.

(2) 두 식  $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ,  $x = y - 2 = z$ 를 동시에 만족하는 점  $(x, y, z)$ 가 존재하지 않으므로 두 직선은 만나지도 않는다.

따라서 (1)과 (2)에 의해 두 직선은 꼬인 위치에 있다.

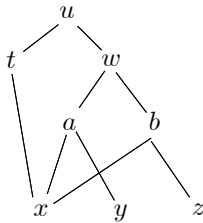
(3) 두 직선위에서 점을 하나씩 잡자.  $P_1 = (0, 0, 0)$ ,  $P_2 = (0, 2, 0)$ .

벡터  $\vec{P_1P_2} = \langle 0, 2, 0 \rangle$ 를 벡터  $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \langle -1, 2, -1 \rangle$ 방향으로의 정사영 벡터의 크기가 바로 두 직선사이의 거리이다. 따라서 구하는 거리는

$$\frac{|\vec{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\langle 0, 2, 0 \rangle \cdot \langle -1, 2, -1 \rangle|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

13.  $u = x^2 w\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$  일 때,  $xu_x + yu_y + zu_z$  를 구하여라. (단,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $u_z = \frac{\partial u}{\partial z}$ )

(풀이)  $t = x^2$ ,  $a = \frac{y}{x}$ ,  $b = \frac{z}{x}$  이라 하면,  $u = tw$  이고 다음과 같은 종속 다이어그램을 생각할 수 있다.



$$u_x = u_t \frac{dt}{dx} + u_w (w_a a_x + w_b b_x) = 2xw + u_w \left( w_a \left( -\frac{y}{x^2} \right) + w_b \left( -\frac{z}{x^2} \right) \right)$$

$$u_y = u_w w_a a_y = u_w w_a \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$u_z = u_w w_b b_z = u_w w_b \left( \frac{1}{x} \right)$$

따라서  $xu_x + yu_y + zu_z = \left( 2x^2 w - u_w w_a \frac{y}{x} - u_w w_b \frac{z}{x} \right) + \left( u_w w_a \frac{y}{x} \right) + \left( u_w w_b \frac{z}{x} \right) = 2tw = 2u$  이다.

14. 평면  $2x + y + 3z = 10$ 와 포물면  $z = x^2 + y^2$ 이 만나서 타원을 이룬다. 원점에서 가장 가까이 있는 이 타원 위의 점을 구하여라.

(풀이)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 이 최소가 되는 점을 구하면 된다.

두 조건을  $g(x, y, z) = 2x + y + 3z - 10 = 0$ ,  $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ 이라고 하면, Lagrange 승수법에 의해,

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

가 성립하므로

$$\langle 2x, 2y, 2z \rangle = \lambda \langle 2, 1, 3 \rangle + \mu \langle 2x, 2y, -1 \rangle$$

로부터

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda + 2\mu x & \dots (1) \\ 2y = \lambda + 2\mu y & \dots (2) \\ 2z = 3\lambda - \mu & \dots (3) \end{cases}$$

이고, (1)과 (2)에서

$$x - 2y = \mu(x - 2y).$$

그러므로

$$x = 2y \text{ 또는 } \mu = 1.$$

그런데  $\mu = 1$ 이면,  $\lambda = 0$ 이고  $z = -\frac{1}{2}$ 인데  $z = x^2 + y^2 \geq 0$ 이어야 하므로 해가 존재하지 않는다.

따라서,  $x = 2y$  이고 이 식을 처음 두 조건에 대입하여 해를 구해 본다.

$5y + 3z = 10$  과  $z = 5y^2$ 을 연립하여 풀면,

$$y = \frac{2}{3}, x = \frac{4}{3}, z = \frac{20}{9} \quad , \quad y = -1, x = -2, z = 5$$

두 점 중  $f(x, y, z)$ 가 더 작은 점은  $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{20}{9})$ .

15. 영역  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 50\}$  위에서 함수  $f(x, y) = \frac{xy}{e^{x^2+y^2}}$ 의 최댓값과 최소값을 구하여라.

풀이:

1) 영역  $D$ 의 내부에 있는 임계점을 구하기 위해  $\nabla f = (0, 0)$  즉

$$f_x = e^{-x^2-y^2}y(1-2x^2) = 0, f_y = e^{-x^2-y^2}x(1-2y^2) = 0$$
로부터

임계점은  $(0, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ 이다.

2) 영역  $D$ 의 경계로부터 제약조건  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 50$ 이라 하자. 라그랑주 승수법에 의해  $\nabla f = \lambda \nabla g$ 로부터 다음의 식을 얻는다.

$$e^{-x^2-y^2}y(1-2x^2) = \lambda 2x$$

$$e^{-x^2-y^2}x(1-2y^2) = \lambda 2y$$

만약  $\lambda = 0$ 인 경우는 영역  $D$ 의 내부에 있는 임계점에 해당하는 경우이므로  $\lambda \neq 0$ 라고 하자. 위의 두 식으로부터  $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ 임을 알 수 있고 구하는 점  $P$ 는 원주위에 있으므로  $x \neq 0, y \neq 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 위의 두 식으로부터

$$\lambda = e^{-x^2-y^2} \frac{y(1-2x^2)}{2x} = e^{-x^2-y^2} \frac{x(1-2y^2)}{2y}$$
 을 구하고

이로부터 관계식  $x^2 = y^2$ 을 얻는다.

이 관계식은 제약조건을 만족해야 하므로 (경계위의) 구하는 점  $P$ 은

$$(x, y) = (5, 5), (5, -5), (-5, 5), (-5, -5), \text{이다.}$$

3) 내부와 경계에서 구한 모든 9개의 점 중에서 함수값이 가장 큰 값이 최댓값  $\frac{1}{2e}$ 이고

가장 작은 값이 최솟값  $-\frac{1}{2e}$ 이다.