

1. $1 - \cos 1$

2. $\frac{3\pi}{32}$

3. $4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 혹은 이것을 변형한 식 : $4\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $4 - 2\sqrt{2}$, $\frac{8 - 4\sqrt{2}}{2}$ 등등

4. $A = 2\pi/3$, $B = -2\cos\phi$, $C = \rho^2\sin\phi$.

5. $\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$

6. $\frac{16}{3}$

7. $\langle 2y, 2x + 2z, ye^{xy}\cos y - x^2 \rangle = 2y\mathbf{i} + (2x + 2z)\mathbf{j} + (ye^{xy}\cos y - x^2)\mathbf{k}$

8. $\frac{3}{2}$

9. $\frac{8}{3}$

10. $\frac{5\pi}{4}$

11. $y = \sqrt{x}$ 를 x 축 회전하여 얻은 포물면과 평면 $y = \frac{1}{2}x$ 로 둘러싸인 영역 T 의 부피를 구하여라.

풀이: $y = \sqrt{x}$ 를 x 축 회전하면

$$f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0 \Leftrightarrow x = y^2 + z^2 \text{ 된다.}$$

$x = 2y$ 와의 교점을 구하면

$$2y = y^2 + z^2$$

$$y^2 - 2y = z^2$$

$$(y-1)^2 + z^2 = 1 \text{ 된다.}$$

구면좌표 $y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$ 로 바꾸면 $r = 2\cos\theta$ 된다.

$$\begin{aligned} & \iint_{D=(y,z)|(y-1)^2+z^2=1} \int_{y^2+z^2}^{2y} dx dy dz \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\cos\theta} (2r\cos\theta - r^2)r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{2}{3}r^3\cos\theta - \frac{1}{4}r^4 \right]_{r=2\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{4}{3}\cos^4\theta d\theta \quad (*1\text{에 의해 다음과 같다}) \\ &= \frac{4}{3} \int_0^\pi \frac{1}{4} \left(\frac{\cos 4\theta + 1}{2} + 1 + 2\cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(*1)

$$\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}, \quad \cos^2 2\theta = \frac{\cos 4\theta + 1}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^4\theta &= \frac{1}{4}(\cos^2 2\theta + 1 + 2\cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\cos 4\theta + 1}{2} + 1 + 2\cos 2\theta \right) \end{aligned}$$

12. 3차원 공간 \mathbf{R}^3 에서 정의된 벡터장

$F(x, y, z) = x(x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{i} + y(x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{j} + z(x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{k}$ 는 보존적임을 보이고, F 의 퍼텐셜 함수를 구하여라.

또한 매개변수곡선 $C(t) = (t, t^2, t^3)$, $(0 \leq t \leq 1)$ 에 따른 선적분 $\int_C F \cdot T ds$ 을 구하여라.

풀이:

1-a) 벡터장 F 의 정의역이 볼록영역이므로 $\nabla \times F = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ 임을 보이면 된다. $\nabla \times F$ 의 정의에 의해 x, y, z 의 성분을 각각 구하면 $R_y - Q_z = 2yz - 2yz = 0$,

$P_z - R_x = 2xz - 2xz = 0$, $Q_x - P_y = 2xy - 2xy = 0$ 이다. 따라서 $\nabla \times F = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ 이다.

1-b) $F = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ 이므로

$f_x = x(x^2 + y^2 + z^2)$ --① $f_y = y(x^2 + y^2 + z^2)$ --② $f_z = z(x^2 + y^2 + z^2)$ --③이다.

①으로부터 $f(x, y, z) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)x^2 + \phi(y, z)$ --④을 얻고 식④를 y 로 편미분하여 ②

와 같게 놓으면 $x^2y + \phi_y = y(x^2 + y^2 + z^2)$ 으로부터 $\phi_y = y(y^2 + z^2)$ 을 얻고 이로부터

$\phi(y, z) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + \psi(z)$ 을 얻는다.

즉 $f(x, y, z) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)x^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + \psi(z)$ --⑤을 얻고 이를 z 로 편미분하여

③과 같게 놓으면 $z(x^2 + y^2) + \psi'(z) = z(x^2 + y^2 + z^2)$ 을 얻고 이로부터 $\psi(z) = \frac{1}{4}z^4 + C$ 을

얻는다.

따라서 $f(x, y, z) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4) + \frac{1}{2}(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + C = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)^2 + C$

1-c) 주어진 선적분은 경로에 무관하므로 $\int_C F \cdot T ds = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = \frac{9}{4}$ 이다.

13. 곡면 S 가 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 의 제1팔분원일 때, 곡면 적분 $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ 를 구하여라.

풀이) $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ 는

$R = \left\{ (\phi, \theta) : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ 에서 S 로 가는 곡면 S 의 매개변수식이고

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \sin\phi \text{이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2) dS &= \iint_R (\sin^2\phi \cos^2\theta + \sin^2\phi \sin^2\theta) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi d\phi d\theta = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

14. 곡선 C 가 원기둥 $x^2 + y^2 = 4$ 와 반구 $x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0$ 가 만나는 곡선이라고 하고 벡터장 $F = \langle x^2 y^3, 1, z \rangle$ 라 하자. 이 때, 위에서 볼 때 반시계 방향의 C 를 따라서 $\int_C F \cdot T ds$ 를 Stokes 정리를 이용하여 구하여라. (단, T 는 반시계 방향으로의 C 의 단위접선벡터)

(풀이) 곡선 C 는 곡면 $S = \{(x, y, z) : z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 4\}$ 의 경계이다.

Stokes 정리에 의해 $\int_C F \cdot T ds = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n} dS$ 가 성립한다. 여기서, \mathbf{n} 는 S 의

외향단위법선벡터이다. 주어진 곡면 S 의 매개변수식을 구하면

$$R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\mathbf{r}: R \rightarrow S,$$

$$\mathbf{r}(x, y) = \langle x, y, \sqrt{16 - x^2 - y^2} \rangle$$

이고 $\nabla \times F = \langle 0, 0, -3x^2 y^2 \rangle$

따라서, $\mathbf{r}_x = \langle 1, 0, -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \rangle$, $\mathbf{r}_y = \langle 0, 1, -\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \rangle$

이므로 $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \langle \frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, 1 \rangle$ 이고

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \frac{16}{16 - x^2 - y^2} \text{ 이다.}$$

따라서, $\int_C F \cdot T ds = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n} dS$

$$= \iint_R -3x^2 y^2 dx dy = -3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dr d\theta = -8\pi$$

15. 곡면 S 는 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq z \leq 1$ 이라 하고, \mathbf{n} 을 곡면 S 의 외향 단위법선 벡터라 하자. 이 때 곡면 S 를 통한 벡터장 $F(x, y, z) = \langle x^3, x^2y, \tan^{-1}z \rangle$ 의 유량 $\iint_S F \cdot \mathbf{n} dS$ 를 구하여라.

<풀이> 곡면 S 를 다음과 같이 매개화 하자.

$$\vec{r}(\theta, z) = \langle \cos\theta, \sin\theta, z \rangle, R: 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 1.$$

$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \langle \cos\theta, \sin\theta, 0 \rangle$ 이고 $\theta = 0$ 일 때 $\langle 1, 0, 0 \rangle$ 이므로 문제에서 주어진 방향과 일치한다.

따라서

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_R (\cos^4\theta + \cos^2\theta \sin^2\theta) \cdot 1 d\theta dz \\ &= \iint_R \cos^2\theta d\theta dz \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 2\pi \end{aligned}$$