

## 2013년 일반수학 1 기말고사 답안지

1.  $\frac{3}{4}\pi$

2.  $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$

3.  $6 - 2e$

4.  $\frac{1}{4}(\tan^2 x + 1)(2\ln(\sec x) - 1) - \frac{1}{2}(\ln(\sec x))^2 + C$

또는  $\frac{1}{4}(\sec^2 x)(2\ln(\sec x) - 1) - \frac{1}{2}(\ln(\sec x))^2 + C$

5. 수렴:  $p < -1$ , 발산:  $p \geq -1$

6.  $\frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{2}$

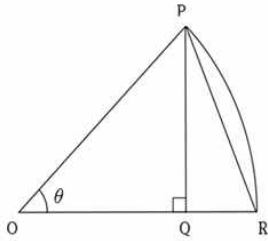
7. 조건수렴

8.  $-\frac{7}{81}$

9.  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

10.  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ , 또는  $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$

11. 중심이  $O$ 이고 중심각이  $\theta$ 인 부채꼴이 있다.  $A(\theta)$ 가 현  $PR$ 과 호  $PR$  사이의 영역이라고 하고  $B(\theta)$ 를 삼각형  $PQR$ 의 넓이라고 할 때  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$ 를 구하여라.



풀이)

부채꼴  $POR$ 의 넓이  $= \frac{1}{2}\theta r^2$

$\triangle POR$ 의 넓이  $= \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$  이다.

따라서  $A(\theta) = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$ .

$\overline{PQ} = r \sin\theta$ ,  $\overline{OQ} = r \cos\theta$ 로부터

$\triangle POQ = \frac{1}{2}r^2 \sin\theta \cos\theta$  이다.

따라서  $B(\theta) = \triangle POR - \triangle POQ$   
 $= \frac{1}{2}r^2 \sin\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin\theta \cos\theta$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{A(\theta)}{B(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta(1 - \cos\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta(1 - \cos\theta) + \sin^2\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{-\sin\theta + 4(\cos\theta)\sin\theta} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

12. 극한값  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}x - P(x)}{x^8} = \frac{2}{3}$ 을 만족하는 최소차수의 다항식  $P(x)$ 에 대해  $P(1)$ 의 값을 구하여라.

**풀이**

$$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \dots \text{이므로}$$

$$P(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^8$$

이다. 따라서  $P(1) = \frac{2}{35}$ 이다.

13. 부정적분  $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}} dx$  을 구하여라.

풀이)

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}} dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}} dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}} dx$$

$$I) \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{x^2+2x+26} + c \quad (u = x^2+2x+26)$$

$$II) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+25}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+25}} du$$

치환:  $u = 5 \tan t, du = 5 \sec^2 t dt, \sqrt{u^2+25} = \sqrt{25(\tan^2 t + 1)} = 5 \sec t$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+25}} du = \int \frac{5 \sec^2 t}{5 \sec t} dt = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + c$$

$$\left( \tan t = \frac{u}{5}, \cos t = \frac{5}{\sqrt{u^2+25}} = \frac{1}{\sec t} \right)$$

$$= \ln \left( \frac{\sqrt{u^2+25}}{5} + \frac{u}{5} \right) + c = \ln \left( \frac{\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1}{5} \right) + c$$

따라서

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}} dx = 2\sqrt{x^2+2x+26} - 2 \ln \left( \frac{\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1}{5} \right) + c$$

$$\text{또는 } = 2\sqrt{x^2+2x+26} - 2 \ln(\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1) + k$$

$$(\text{참고: } \sinh^{-1}(\frac{x+1}{5}) = \ln(\frac{\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1}{5}))$$

14. 부등식  $\ln(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(n)$ , ( $n$ : 자연수)을 이용하여 다음 급수의 수렴 및 발산을 판정하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

풀이)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n \quad \text{이므로}$$

$$\frac{1}{n^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1 + \ln n}{n^2}$$

한편  $\ln n \leq \sqrt{n}$  이므로

$$\frac{1}{n^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1 + \ln n}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$$

여기서  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  는  $p > 1$ 인  $p$ 급수이므로 수렴한다.

그러므로 비교판정법에 의하여

양항급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$  는 수렴한다.

15. 개구간  $(-2, 2)$  에서 정의된 함수  $f(x) = \int_0^x \frac{t}{(t+2)(t+3)} dt$  의 매클로린 급수가  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  일 때, 무한급수  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n a_n$  을 값을 구하여라.

풀이:

함수  $f(x) = \int_0^x \frac{t}{(t+2)(t+3)} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  를 (항별)미분하면

$f'(x) = \frac{x}{(x+2)(x+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  을 얻는다.

양변에  $x$  를 곱하면  $x f'(x) = \frac{x^2}{(x+2)(x+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$  을 얻고

위 식의 양변에  $x = -1$  을 대입하면 주어진 급수의 값은  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n a_n = \frac{1}{2}$  이 된다.

다른 풀이(직접적인 계산):

피적분함수의 부분분수형이  $\frac{t}{(t+2)(t+3)} = \frac{-2}{t+2} + \frac{3}{t+3}$  이므로

$f(x) = -2 \ln(2+x) + 3 \ln(3+x) + 2 \ln 2 - 3 \ln 3$  을 얻는다.

다음과 같이 두 (자연) 로그 함수의 매클로린 급수는

$\ln(2+x) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{x}{2}) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{1}{n 2^n} x^n$

$\ln 3 + x = \ln 3 + \ln(1 + \frac{x}{3}) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{1}{n 3^n} x^n$  이므로

함수  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n \frac{1}{n 2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n 3^{n-1}}) x^n$  을 얻는다.

따라서  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$  이다.