

일반수학 1 중간고사(2012)  
모범답안

<< 단 답 형 >>

1.  $[0, 1) \cup (1, \infty)$

2.  $-1$

3.  $(2^{\frac{4}{3}}, 2^{\frac{5}{3}})$

4.  $-\frac{1}{2}$

5.  $y = 2ex + 2e + 1$

6.  $\ln 2 - \frac{1}{2}$

7.  $\frac{8}{9}(2\sqrt{2} - 1)$

8.  $\frac{6}{5}\pi$

9.  $\ln \sqrt{3}$

10.  $e - 1$

<< 서술형 >>

11.  $f(0) > 0, f(1) < 1$  이라 가정하자. (만약,  $f(0) = 0$  이거나  $f(1) = 1$  이라면  $c = 0, 1$  이 우리가 원하는 점이 된다)

보조함수  $g(x) = f(x) - x$ 를 생각하자. 그러면  $g$  는  $[0, 1]$  에서 연속이고  $g(0) = f(0) - 0 > 0$  이고  $g(1) = f(1) - 1 < 0$  이므로 중간값 정리에 의해  $g(c) = 0$  인  $c \in [0, 1]$  가 존재한다. 즉,  $f(c) = c$  인 점이 존재한다.

12. 구간  $I$ 에서  $f$ 가 미분가능하고 모든  $x \in I$ 에 대하여  $f'(x) = 0$ 이면  $f$ 는 상수함수임을 보이자.  $a, b \in I$  ( $a < b$ )라 하자. 구간  $[a, b]$ 에서 평균값 정리에 따르면,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ ----- (1)}$$

인  $c \in (a, b)$ 가 존재한다. 가정에 의해  $f'(c) = 0$ 이므로, (1)식으로부터  $f(a) = f(b)$ 를 얻고, 따라서  $f$ 는 상수함수이다.





13.  $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 2}$ 이고  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$ 이므로  $f(x)$ 가  $y = x + 2$ 을 점근선으로 갖는다. 또한  $\lim_{x \rightarrow \pm 2} f(x) = \pm\infty$ 이므로  $x = 2$ 는 수직점

근선이다.  $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2}$ 이므로  $f'(x) = 0$ 되는 점은

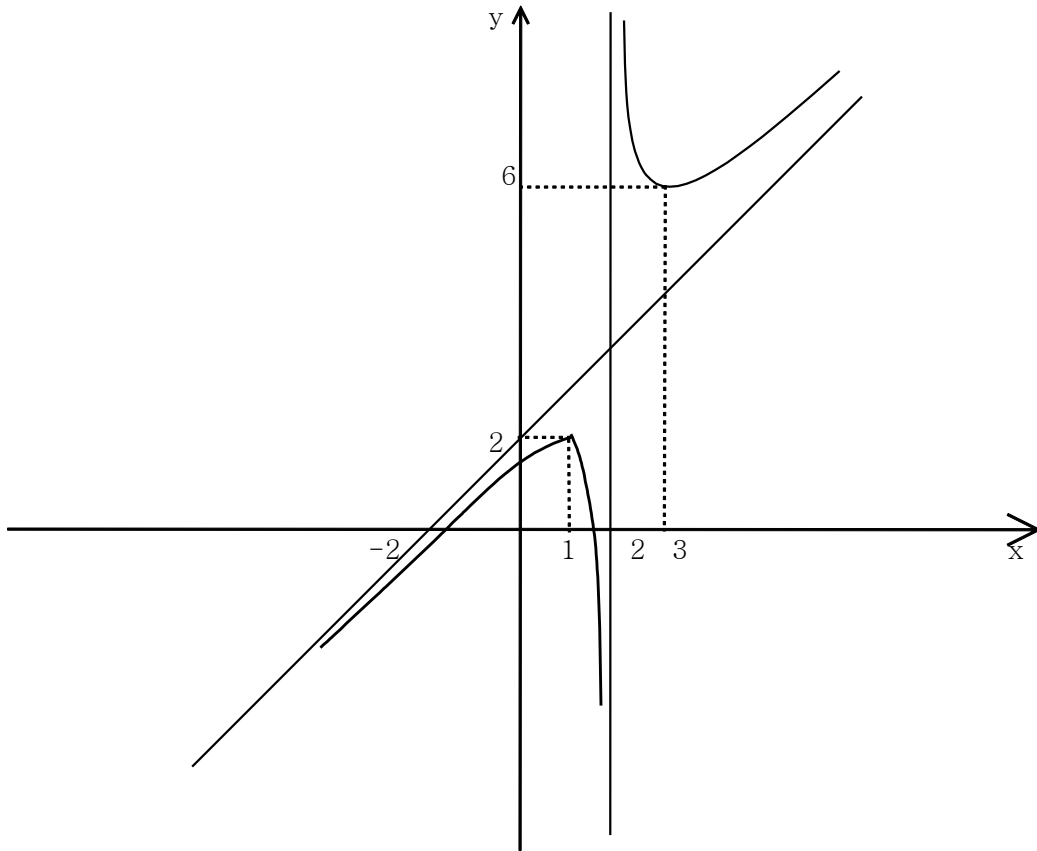
$x = 1, x = 3$ 이다.

$$f'(x) = \frac{2}{(x - 2)^3}.$$

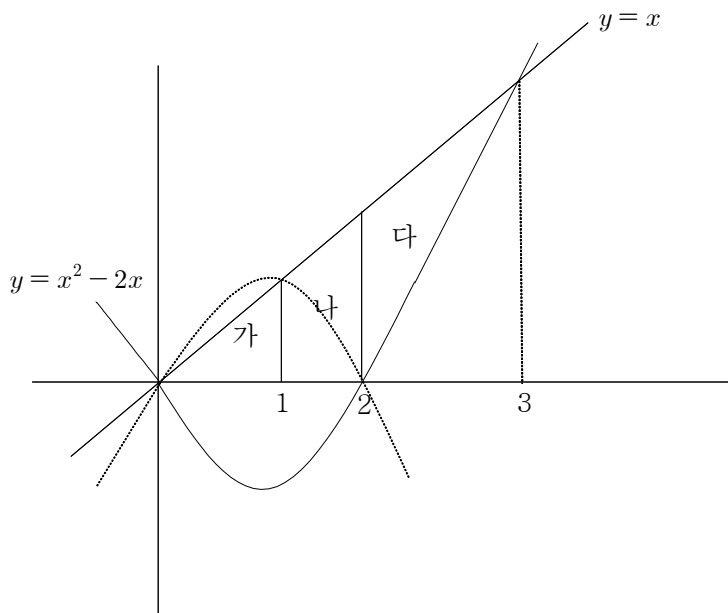
따라서 증감표를 그려보면

x		1		2		3	
$f'(x)$	+	0	-	<del> </del>	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	<del> </del>	+	+	+
$f(x)$		극대		<del> </del>		극소	

극댓값  $f(1) = \frac{1 - 3}{1 - 2} = 2$ , 극솟값  $f(3) = \frac{9 - 3}{3 - 2} = 6$ .



14.



$0 < x < 1$  일 때  $y = x^2 - 2x$ 를 회전한 것이  $y = x$ 를 회전한 것보다

크기 때문에 세 영역으로 나누어서 계산한다.

부피 = 가 + 나 + 다

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \pi(x^2 - 2x)^2 dx + \int_1^2 \pi x^2 dx + \int_2^3 \pi[x^2 - (x^2 - 2x)^2] dx \\ &= \pi \left( \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}(8 - 1) + (3^4 - 2^4) - \frac{1}{5}(3^5 - 2^5) - (3^3 - 2^3) \right) \\ &= \frac{20}{3} \pi \end{aligned}$$

15. 방정식  $x^3 = mx$  으로부터 세 교점의  $x$ 좌표는  $x = -\sqrt{m}, 0, \sqrt{m}$  이다.

단면법으로  $V_x$  을 구하면 
$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{\sqrt{m}} \pi(mx)^2 - \pi(x^3)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{m}} m^2 x^2 - x^6 dx \\ &= \pi \frac{4}{21} m^3 \sqrt{m} \text{ 을 얻는다.} \end{aligned}$$

원통각법으로  $V_y$  을 구하면

$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^{\sqrt{m}} 2\pi x f(x) dx - \int_0^{\sqrt{m}} 2\pi x g(x) dx \quad (f(x) = x^3, g(x) = mx) \\ &= \int_0^{\sqrt{m}} 2\pi x^4 dx - \int_0^{\sqrt{m}} 2\pi m x^2 dx \\ &= \pi \frac{4}{15} m^2 \sqrt{m} \end{aligned}$$

을 얻는다. ( $V_y$  를 단면법으로 구할 수도 있다.)

조건  $\frac{V_x}{V_y} = 1$  으로부터  $\frac{5}{7}m = 1$  을 얻는다. 따라서  $m = \frac{7}{5}$  이다.