2012년2학기 일반수학 2 기말고사 답안지

단답식 답안

1. 1

2. $\frac{\pi}{8}$

3. 8π

4. $A=\frac{\pi}{2}$, $B=\sqrt{2}$, $C=\rho^3\sin^2\phi$ (정답인 아닌 경우에 A와B만 맞으면 2점, C만은 3점)

5. $\frac{64}{5}\pi$

6. $< ye^y\sin(yz), -ze^z\cos(xz), -xe^{xy} >$ 또는 $ye^y\sin(yz)\boldsymbol{i}-ze^z\cos(xz)\boldsymbol{j}-xe^{xy}\boldsymbol{k}$

7. $\frac{249}{10}$

8. $\frac{4}{3}\pi$

9. 2π

10. 12π

주관식 답안

11. 원 $2x^2+y^2-4y=0$ 위의 점 (x,y) 중에서, 함수 $f(x,y)=e^{-xy}$가 최댓값을 가지는 모든 점들을 구하여라.

답안: 제약조건으로부터 함수 $g(x,y)=2x^2+y^2-4y$라고 놓으면, $g_x=4x,\ g_y=2y-4$이고 $f_x=-ye^{-xy}$, $f_y=-xe^{-xy}$이므로 Lagrange 승수법에 의해 다음의 방정식을 얻는다.
$<-ye^{-xy}, -xe^{-xy}> \ = \lambda <4x, 2y-4> \Leftrightarrow$ (1) $-ye^{-xy} = 4\lambda x$ (2) $-xe^{-xy} = (2y-4)\lambda$.
방정식(1)과 (2)으로부터 $\lambda=0 \Leftrightarrow x=y=0$임을 알 수 있다.
만약 $\lambda\neq 0$이면 방정식(1)로부터 $x=0\Leftrightarrow y=0$임을 알 수 있다. 한편 방정식(2)로부터 $x=0\Leftrightarrow y=2$임을 알 수 있다. 따라서 $x\neq 0$이고 $y\neq 0, y\neq 2$ 임을 알 수 있다.
이제 식 (1)과 (2)에서 $\lambda\neq 0$의 값을 표현하는 식($\lambda=-\frac{ye^{-xy}}{4x}=-\frac{xe^{-xy}}{2y-4}$)으로 부터 $\frac{y}{4x}=\frac{x}{2y-4}$ 즉 $4x^2=2y^2-4y$을 얻는다. 이 식과 제약조건과의 연립방정식

$$4x^2=2y^2-4y \quad \text{과} \quad 2x^2+y^2-4y=0$$

에서 x^2을 소거하면 방정식 $4y^2-12y=0$을 얻는다. 이로부터 $y\neq 0$이므로 $y=3$을 구하고 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$을 구한다. 마지막으로 $f(0,0)=1$, $f(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},3)=e^{\mp\frac{3\sqrt{6}}{2}}$이므로 $(-\frac{\sqrt{6}}{2},3)$에서 함수 f가 최댓값 $f(-\frac{\sqrt{6}}{2},3)=e^{\frac{3\sqrt{6}}{2}}$를 가진다. 따라서 구하는 점은 $(-\frac{\sqrt{6}}{2},3)$이다.

12. 다음의 삼중적분을 구하여라.

$$\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}} dz\,dx\,dy$$

답안: $\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\ dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\ dydx$ ($\because$ 적분순서를 바꾸어)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\ dx$ ($u=\cos x$로 치환)

$= \int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\ du$ (또는 $= \frac{-1}{3}\ [(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}\ ]_0^{\frac{\pi}{2}}$)

$= \frac{1}{3}\ (1+u^2)^{\frac{3}{2}}\ ]_0^1$

$= \frac{2\sqrt{2}\ -1}{3}$

13. 구면 $x^2+y^2+z^2=9$에서 $1 \le z \le 2$인 부분의 넓이를 주면좌표를 사용하여 구하여라.

답안: 주면좌표를 사용한 $z \ge 0$인 구면의 매개변수식은 다음과 같이 주어진다.
$\mathrm{r}(r,\theta) = \langle rcos\theta, r\sin\theta, \sqrt{9-r^2}\,\rangle, 0 \le r \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi$.
주어진 곡면을 xy-평면으로 사영시켰을 때 생기는 영역 R을 구하면, $R = \{(x,y) | 5 \le x^2+y^2 \le 8\}$ 이다. 즉 $R = \{(r,\theta) | \sqrt{5} \le r \le \sqrt{8}, 0 \le \theta \le 2\pi\}$이다.
그러면 곡면의 넓이는$A = \iint_R |\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \theta}| dr\,d\theta$ 으로 주어진다.

$$\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{-r}{\sqrt{9-r^2}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{9-r^2}}, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{9-r^2}}, r \right\rangle$$이고

$|\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \theta}| = \sqrt{\frac{9r^2}{9-r^2}} = \frac{3r}{\sqrt{9-r^2}}$ (*)이므로, 주어진 곡면의 넓이는

$$A = \iint_R 3r\frac{1}{\sqrt{9-r^2}}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} 3r\frac{1}{\sqrt{9-r^2}}\,dr\,d\theta = 6\pi\left[-\sqrt{9-r^2}\,\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} = 6\pi$$ 이다.

[참고] 위(*)에서처럼 외적의 크기를 직접 구하지 않고 공식을 사용하면 $z=\sqrt{9-r^2}$ 으로부터 $z_r = -\frac{r}{\sqrt{9-r^2},}$ $z_\theta = 0$을 구한 후, $|\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \theta}| = \sqrt{r^2+r^2z_r^2+z_\theta^2} = \frac{3r}{\sqrt{9-r^2}}$ 을 얻을 수 있다.

14. 보존적인 벡터장 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(e^x\cos y+yz)\boldsymbol{i}+(xz-e^x\sin y)\boldsymbol{j}+(xy+z)\boldsymbol{k}$ 의 퍼텐셜 함수를 구하고, 매개변수곡선 $C(t)=<t,t^2,t^3>$, $t\in[0,1]$을 따르는 선적분 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,ds$를 구하여라.

답안: $P=e^x\cos y+yz$, $Q=xz-e^x\sin y$, $R=xy+z$ 이라 두면,
$\frac{\partial f}{\partial x}=P=e^x\cos y+yz$와 $\frac{\partial f}{\partial y}=Q=xz-e^x\sin y$ 와 $\frac{\partial f}{\partial z}=R=xy+z$를 만족하는 스칼라함수 f를 다음과 같이 구하면 된다.

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}=P=e^x\cos y+yz$
$$\Rightarrow\ f(x,y,z)=\int(e^x\cos y+yz)\,dx+\phi(y,z)=e^x\cos y+xyz+\phi(y,z)$$

(2) $xz-e^x\sin y=Q=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y+xyz+\phi(y,z))=xz-e^x\sin y+\frac{\partial}{\partial y}\phi(y,z)$
$$\Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial y}\phi(y,z)=0\ \Rightarrow\ \phi(y,z)=g(z)$$

(3) $xy+z=R=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(e^x\cos y+xyz+g(z))=xy+\frac{d}{dz}g(z)$
$$\Rightarrow\ \frac{d}{dz}g(z)=z\ \Rightarrow\ g(z)=\frac{1}{2}z^2+C$$

따라서 (1),(2),(3)에 의해 $\boldsymbol{F}$의 퍼텐셜 함수 f는
$$f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+\frac{1}{2}z^2+C$$ (C는 임의의 상수)이다.

한편 $\boldsymbol{F}$가 보존적인 벡터장이므로 선적분 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,ds$는 곡선$C$의 경로에 무관하다. 따라서 주어진 선적분은 다음과 같이 주어진다:
$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,ds&=f(x(1),y(1),z(1))-f(x(0),y(0),z(0))\\&=f(1,1,1)-f(0,0,0)\\&=e\cos 1+\frac{1}{2}\end{aligned}$$ 이다.

15. 평면 위의 임의의 한 점 (x_1, y_1)에서 출발하여 다른 점 (x_2, y_2)을 잇는 선분을 C라 하자. 이 때, 선적분 $\int_C xdy$ 를 x_1, y_1, x_2, y_2 로 표현하고, 이 결과를 이용하여 점 (0, 0), (3, 1), (4, 3), (2, 8), (1, 5)을 꼭지점으로 하는 오각형의 넓이를 구하여라.

답안: 임의의 한 고정점 (x_1, y_1)에서 출발하여 다른 점 (x_2, y_2)을 잇는 선분 C의 매개변수식은 다음과 같이 주어진다:

$$x(t) = (x_2 - x_1)t + x_1 \ , \ y(t) = (y_2 - y_1)t + y_1 \ \ (0 \le t \le 1).$$

이를 이용하여 선적분을 계산하면,

$$\int_C xdy = \int_0^1 ((x_2 - x_1)t + x_1)(y_2 - y_1)\,dt = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_2 - y_1) \ \text{----}(*)$$

을 얻는다.

한편, 주어진 오각형의 둘레를 $\widetilde{C}$라 하면, $\widetilde{C}$는 양의 방향(반시계방향)으로 진행하는 연속적인 다섯 개의 선분 C_i $(i = 1, \cdots 5)$으로 이루어진 곡선이 된다. 즉 $\widetilde{C} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$이다. Green 정리(따름정리)에 의해 오각형의 넓이 A는

$$A = \oint_{\widetilde{C}} xdy = \sum_{i=1}^{5} \oint_{C_i} xdy$$으로 주어진다.

앞에서 구한 선적분의 결과(*)를 사용하면, 주어진 오각형의 넓이 A는

$$A = \frac{1}{2}[(3 \cdot 1) + (7 \cdot 2) + (6 \cdot 5) + (3 \cdot (-3)) + (1 \cdot (-5))] = \frac{33}{2}$$ 이다.