

2012년2학기 일반수학 2 기말고사 답안지

단답식 답안

1. 1

2. $\frac{\pi}{8}$

3. 8π

4. $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \sqrt{2}$, $C = \rho^3 \sin^2 \phi$ (정답인 아닌 경우에 A와B만 맞으면 2점, C만은 3점)

5. $\frac{64}{5}\pi$

6. $\langle ye^y \sin(yz), -ze^z \cos(xz), -xe^{xy} \rangle$ 또는 $ye^y \sin(yz)\mathbf{i} - ze^z \cos(xz)\mathbf{j} - xe^{xy}\mathbf{k}$

7. $\frac{249}{10}$

8. $\frac{4}{3}\pi$

9. 2π

10. 12π

주관식 답안

11. 원 $2x^2 + y^2 - 4y = 0$ 위의 점 (x, y) 중에서, 함수 $f(x, y) = e^{-xy}$ 가 최댓값을 가지는 모든 점들을 구하여라.

답안: 제약조건으로부터 함수 $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4y$ 라고 놓으면, $g_x = 4x, g_y = 2y - 4$ 이고 $f_x = -ye^{-xy}, f_y = -xe^{-xy}$ 이므로 Lagrange 승수법에 의해 다음의 방정식을 얻는다.

$$\langle -ye^{-xy}, -xe^{-xy} \rangle = \lambda \langle 4x, 2y - 4 \rangle \Leftrightarrow (1) \quad -ye^{-xy} = 4\lambda x \quad (2) \quad -xe^{-xy} = (2y - 4)\lambda.$$

방정식(1)과 (2)으로부터 $\lambda = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ 임을 알 수 있다.

만약 $\lambda \neq 0$ 이면 방정식(1)로부터 $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ 임을 알 수 있다. 한편 방정식(2)로부터 $x = 0 \Leftrightarrow y = 2$ 임을 알 수 있다. 따라서 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0, y \neq 2$ 임을 알 수 있다.

이제 식 (1)과 (2)에서 $\lambda \neq 0$ 의 값을 표현하는 식($\lambda = -\frac{ye^{-xy}}{4x} = -\frac{xe^{-xy}}{2y-4}$)으로부터

$$\frac{y}{4x} = \frac{x}{2y-4} \quad \text{즉} \quad 4x^2 = 2y^2 - 4y \quad \text{을 얻는다. 이 식과 제약조건과의 연립방정식}$$

$$4x^2 = 2y^2 - 4y \quad \text{과} \quad 2x^2 + y^2 - 4y = 0$$

에서 x^2 을 소거하면 방정식 $4y^2 - 12y = 0$ 을 얻는다. 이로부터 $y \neq 0$ 이므로 $y = 3$ 을 구하고

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{을 구한다. 마지막으로} \quad f(0, 0) = 1, \quad f\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{2}, 3\right) = e^{\mp \frac{3\sqrt{6}}{2}}$$

$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 3\right)$ 에서 함수 f 가 최댓값 $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 3\right) = e^{\frac{3\sqrt{6}}{2}}$ 를 가진다. 따라서 구하는 점은

$$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 3\right) \text{이다.}$$

12. 다음의 삼중적분을 구하여라.

$$\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dz dx dy$$

답안: $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dy dx$ (\because 적분순서를 바꾸어)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \quad (u = \cos x \text{로 치환})$$

$$= \int_0^1 u \sqrt{1 + u^2} du \quad (\text{또는} = \frac{-1}{3} [(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{\pi}{2}})$$

$$= \frac{1}{3} (1 + u^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$$

13. 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 에서 $1 \leq z \leq 2$ 인 부분의 넓이를 주면좌표를 사용하여 구하여라.

답안: 주면좌표를 사용한 $z \geq 0$ 인 구면의 매개변수식은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{r}(r, \theta) = \langle r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{9-r^2} \rangle, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

주어진 곡면을 xy -평면으로 사영시켰을 때 생기는 영역 R 을 구하면,

$$R = \{(x, y) | 5 \leq x^2 + y^2 \leq 8\} \text{ 이다. 즉 } R = \{(r, \theta) | \sqrt{5} \leq r \leq \sqrt{8}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \text{ 이다.}$$

그러면 곡면의 넓이는 $A = \iint_R \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| dr d\theta$ 으로 주어진다.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & \frac{-r}{\sqrt{9-r^2}} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{9-r^2}}, \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{9-r^2}}, r \right\rangle \text{ 이고}$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \sqrt{\frac{9r^2}{9-r^2}} = \frac{3r}{\sqrt{9-r^2}} (*) \text{ 이므로, 주어진 곡면의 넓이는}$$

$$A = \iint_R 3r \frac{1}{\sqrt{9-r^2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} 3r \frac{1}{\sqrt{9-r^2}} dr d\theta = 6\pi \left[-\sqrt{9-r^2} \right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} = 6\pi \text{ 이다.}$$

[참고] 위(*)에서처럼 외적의 크기를 직접 구하지 않고 공식을 사용하면 $z = \sqrt{9-r^2}$ 으로부터 $z_r = -\frac{r}{\sqrt{9-r^2}}, z_\theta = 0$ 을 구한 후, $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \sqrt{r^2 + r^2 z_r^2 + z_\theta^2} = \frac{3r}{\sqrt{9-r^2}}$ 을 얻을 수 있다.

14. 보존적인 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \sin y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$ 의 퍼텐셜 함수를 구하고, 매개변수곡선 $C(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $t \in [0, 1]$ 을 따르는 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ 를 구하여라.

답안: $P = e^x \cos y + yz$, $Q = xz - e^x \sin y$, $R = xy + z$ 이라 두면,

$\frac{\partial f}{\partial x} = P = e^x \cos y + yz$ 와 $\frac{\partial f}{\partial y} = Q = xz - e^x \sin y$ 와 $\frac{\partial f}{\partial z} = R = xy + z$ 를 만족하는 스칼라함수

f 를 다음과 같이 구하면 된다.

$$(1) \frac{\partial f}{\partial x} = P = e^x \cos y + yz$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = \int (e^x \cos y + yz) dx + \phi(y, z) = e^x \cos y + xyz + \phi(y, z)$$

$$(2) xz - e^x \sin y = Q = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos y + xyz + \phi(y, z)) = xz - e^x \sin y + \frac{\partial}{\partial y} \phi(y, z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \phi(y, z) = 0 \Rightarrow \phi(y, z) = g(z)$$

$$(3) xy + z = R = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (e^x \cos y + xyz + g(z)) = xy + \frac{d}{dz} g(z)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} g(z) = z \Rightarrow g(z) = \frac{1}{2} z^2 + C$$

따라서 (1),(2),(3)에 의해 \mathbf{F} 의 퍼텐셜 함수 f 는

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{1}{2} z^2 + C \quad (C \text{는 임의의 상수}) \text{이다.}$$

한편 \mathbf{F} 가 보존적인 벡터장이므로 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ 는 곡선 C 의 경로에 무관하다. 따라서

주어진 선적분은 다음과 같이 주어진다:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= f(x(1), y(1), z(1)) - f(x(0), y(0), z(0)) \\ &= f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) \\ &= e \cos 1 + \frac{1}{2} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

15. 평면 위의 임의의 한 점 (x_1, y_1) 에서 출발하여 다른 점 (x_2, y_2) 을 잇는 선분을 C 라 하자. 이 때, 선적분 $\int_C xdy$ 를 x_1, y_1, x_2, y_2 로 표현하고, 이 결과를 이용하여 점 $(0, 0), (3, 1), (4, 3), (2, 8), (1, 5)$ 을 꼭지점으로 하는 오각형의 넓이를 구하여라.

답안: 임의의 한 고정점 (x_1, y_1) 에서 출발하여 다른 점 (x_2, y_2) 을 잇는 선분 C 의 매개변수 식은 다음과 같이 주어진다:

$$x(t) = (x_2 - x_1)t + x_1, \quad y(t) = (y_2 - y_1)t + y_1 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

이를 이용하여 선적분을 계산하면,

$$\int_C xdy = \int_0^1 ((x_2 - x_1)t + x_1)(y_2 - y_1) dt = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_2 - y_1) \quad \text{----} (*)$$

을 얻는다.

한편, 주어진 오각형의 둘레를 \tilde{C} 라 하면, \tilde{C} 는 양의 방향(반시계방향)으로 진행되는 연속적인 다섯 개의 선분 C_i ($i = 1, \dots, 5$)으로 이루어진 곡선이 된다. 즉 $\tilde{C} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$ 이다. Green 정리(따름정리)에 의해 오각형의 넓이 A 는

$$A = \oint_{\tilde{C}} xdy = \sum_{i=1}^5 \oint_{C_i} xdy \text{으로 주어진다.}$$

앞에서 구한 선적분의 결과(*)를 사용하면, 주어진 오각형의 넓이 A 는

$$A = \frac{1}{2}[(3 \cdot 1) + (7 \cdot 2) + (6 \cdot 5) + (3 \cdot (-3)) + (1 \cdot (-5))] = \frac{33}{2} \text{이다.}$$