2011년도 1학기 일반수학 1 중간고사 답안지

단답식:

1. 1
2. $-\frac{1}{3}$
3. $y=-2(x-1)$ 또는 $y=-2x+2$
4. $\frac{1}{e^4}$ 또는 e^{-4}
5. -0.251
6. 8
7. $-4\pi^2$
8. $2e$
9. $\frac{5-\sqrt{5}}{\ln 5}$
10. $\frac{\pi}{2}-1$

주관식:

11. 곡선 $y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $(0 \le x \le 1)$ 을 x축을 중심으로 회전시켜 얻은 회전곡면의 넓이를 구하여라.

풀이: 공식에 의해 회전곡면의 넓이 A는

A = $\int_0^1 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$으로 주어진다.

$f'(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$이므로 $1+f'(x)^2=(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2})^2$이다.

따라서 A = $\int_0^1 2\pi\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^1(e^{2x}+2+e^{-2x})dx$

$=\frac{\pi}{2}[\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}]_0^1$

= $\frac{\pi(4+e^2-e^{-2})}{4}$ 이다.

12. 함수 $f(x)=3^x+2\sqrt{x}$에 대하여 방정식 $f'(x)=21$ 이 적어도 하나의 양의 실근을 가짐을 보여라.

풀이1: 중간값 정리를 사용.

주어진 함수의 도함수는 $f'(x)=3^x\ln3+\frac{1}{\sqrt{x}}$이다. 이제 $g(x)=3^x\ln3+\frac{1}{\sqrt{x}}-21$으로 두면 $g(x)$는 폐구간$[1,4]$에서 연속함수이다.

$g(1)=3\ln3+1-21<0$ 이고 $g(4)=81\ln3+\frac{1}{2}-21>0$ 이므로 중간값의 정리에 의해 $g(c)=0$을 만족하는 실수 $c\in[1,4]$가 존재한다. 따라서 c가 방정식$f'(x)=21$을 만족하는 양의 실근이다. 여기서 중간값 정리를 사용할 때 폐구간 $[1,4]$대신 다른 $[1,3]$폐구간을 사용할 수 있다.

풀이2: 평균값 정리의 사용.

주어진 함수f의 정의역은 $x\ge0$이므로 두 점 $(0,1),(4,f(4))$에서의 평균변화율은 $\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{84}{4}=21$이다. 이제 평균값 정리에 의해 $f'(c)=21$을 만족하는 c가 개구간 $(0,4)$에 존재한다.

13. 함수 $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$의 그래프에서 x-절편, y-절편, 점근선의 방정식, 극솟값, 변곡점의 좌표를 구하여 다음 표를 채워라.

x-절편: $x=-1$	y-절편: $y=1$
수평점근선:$y=0$	수직점근선:$x=1$
$x=$ -3 에서 극솟값은 $-\dfrac{1}{8}$	변곡점:$(-5,-\dfrac{1}{9})$

풀이: $y=0$에서 x-절편은 $x=-1$; $x=0$일 때 $y=1$이므로 y-절편은 $y=1$;
분모=0에서 수직점근선 $x=1$;
분모의 차수가 분자의 차수보다 크므로 수평점근선은 $y=0$;

$y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$에서

$y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{4}{(x-1)^3}=-\dfrac{x+3}{(x-1)^3}$; $y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{12}{(x-1)^4}=\dfrac{2(x+5)}{(x-1)^4}$

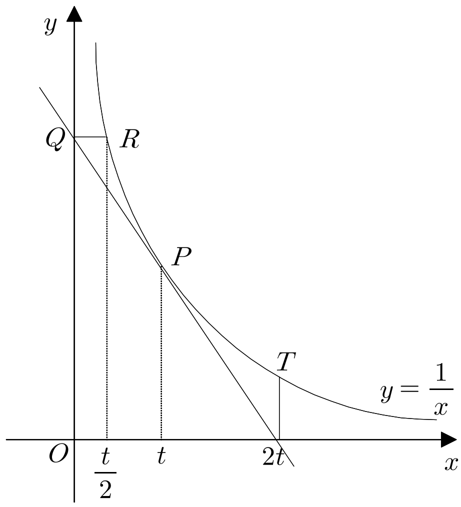
$y'=0$에서 $x=-3$, $y''=0$에서 $x=-5$를 얻는다.
증감표를 그려보면,

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	-	-	-	0	+	$\times$	-
y''	-	0	+	+	+	$\times$	+

y'의 부호가 $x=-3$에서 -에서 +로 바뀌므로, 극솟값 $-\dfrac{1}{8}$이다.

y''의 부호가 $x=-5$에서 한 번만 바뀌므로, 변곡점은 $(-5,-\dfrac{1}{9})$이다.

14. 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 위의 한 동점 $P(t,\dfrac{1}{t})$에서의 접선이 y-축과 만나는 점을 Q라고 하자. 점 Q에서의 y-축에 수직인 직선이 $y=\dfrac{1}{x}$와 만나는 점을 R라 하고, 선분PQ, 선분QR, 곡선RP로 둘러싸인 영역을 A라고 하자. 영역 A를 y-축을 중심으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피 V가 $V=\dfrac{5\pi}{3}$일 때, t의 값을 구하여라.



풀이1: 단면법을 사용.

함수 $y=\frac{1}{x}$ 의 도함수는 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$ 이므로 점 $P(t,\frac{1}{t})$ 에서 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}\cdots①$$

이다. 접선 ①의 y-절편Q 의 좌표는 $Q(0,\frac{2}{t})$ 이고 등식 $\frac{2}{t}=\frac{1}{x}$ 으로부터 점 R 의 x-좌표는 $x=\frac{t}{2}$ 이다.

주어진 영역 A는 $\frac{1}{t}\le y\le\frac{2}{t}$ 이고 곡선 $x=\frac{1}{y}$ 과 직선 $x=-t^2y+2t$ 으로 둘러싸인 영역이다. 이 영역을 y-축을 중심으로 회전시켜 얻은 회전체의 단면$A(y)$은 원환으로

$A(y)=\pi((\frac{1}{y})^2-(-t^2y+2t)^2)$ 이다.

이 회전체의 부피 V는

$$V=\int_{\frac{1}{t}}^{\frac{2}{t}}A(y)dy=\int_{\frac{1}{t}}^{\frac{2}{t}}\pi((\frac{1}{y})^2-(-t^2y+2t)^2)\,dy$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{y}+\frac{1}{3t^2}(-t^2y+2t)^3\right]_{\frac{1}{t}}^{\frac{2}{t}}$$

$$=\pi(\frac{t}{2}-\frac{t}{3})=\frac{\pi}{6}t \text{ 이다.}$$

따라서 $V=\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{6}t$이므로 $t=10$이다.

풀이2: 원통각법을 이용.

원통각법을 이용하면 이 회전체의 부피 V는

$V=\int_0^{\frac{t}{2}} 2\pi x\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}x-\frac{2}{t}\right)dx+\int_{\frac{t}{2}}^{t} 2\pi x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{t^2}x-\frac{2}{t}\right)dx$으로 주어진다.

$$= \frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\frac{t}{2}} x^2\,dx+2\pi\int_{\frac{t}{2}}^{t}\left(1+\frac{1}{t^2}x^2-\frac{2}{t}x\right)dx$$

$$=\frac{2\pi}{t^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{t}{2}}+2\pi\left[x+\frac{1}{3t^2}x^3-\frac{1}{t}x^2\right]_{\frac{t}{2}}^{t}$$

$$=\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{12}t=\frac{\pi}{6}t.$$

주어진 부피 V가 $V=\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{6}t$이므로 $t=10$이다.

15. 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{\pi}{2} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}}\,dx \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

풀이1:

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin x$는 증가함수이므로 $0\le \sin\frac{x}{2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

$0\le \sin^2\frac{x}{2} \le \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2}\le 1-\sin^2\frac{x}{2} \le 1$이다.

$\frac{1}{\sqrt{2}}\le \sqrt{1-\sin^2 x}\le 1$ 이므로 $1\le \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \le \sqrt{2}$ 이다.

이제 위 부등식에 적분을 취하면 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,dx$을 얻는다.

따라서 $\frac{\pi}{2}\le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}}dx \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}$이다.

풀이2: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}}=\sec\frac{x}{2}$이므로 주어진 적분은

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec\frac{x}{2}dx \text{ 이다.}$$

이제 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $\frac{1}{\sqrt{2}}\le \cos\frac{x}{2} \le 1$이므로 $1\le \sec\frac{x}{2} \le \sqrt{2}$이다.

이 부등식에 적분을 취하면 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec\frac{x}{2}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,dx$이 되고 원하는 부등식

$\frac{\pi}{2}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}}dx\le\frac{\pi}{\sqrt{2}}$이 나온다.