2011년도 일반수학 1 기말고사 해답

단답식:

1. f의 치역: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ g의 치역: $[0, \pi]$
2. $1.4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$
3. (1) 조건(부)수렴 (2) 절대수렴
4. $a = 1$
5. $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$ 또는 $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + C$
6. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$
7. $1 + \ln 2$
8. $-1 + 2\ln 2$
9. $\frac{1}{4}\ln 2$
10. $\ln\frac{3}{2}$ 또는 $\ln 3 - \ln 2$

주관식:

11. 다음 급수들의 수렴 여부를 판정하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$

풀이:

(1) $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 으로 두자.

극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 을 구하기 위해 $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 으로 놓자.

$n\to\infty$ 일 때 $x\to 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 는 $p = \frac{1}{2}$ 인 $p-$급수이므로($p<1$) 발산한다.

따라서 극한비교 판정법에 의해 주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$는 발산한다.

(2) 모든 자연수 n에 대해

$nln(n+1) \le (n+1)\ln(n+1)$ 으므로 $\frac{1}{nln(n+1)} \ge \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

적분판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 가 발산함을 보이자. 이 급수에 대응하는 특이적분은 치환적분 $t = \ln x$에 의해

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x\ln x} dx == \lim_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t} dt = \lim_{b\to\infty} \ln\ln b - \ln\ln 2 = \infty$$

이므로 발산한다. 그러므로 비교판정법에 의해 주어진 급수는 발산한다.

참고: 풀이와 다른 판정법을 사용할 수 있음에 유의한다.

12. 부정적분 $\int \sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}\,dx$ 을 구하여라.

풀이: $\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}} = t$ 라 하면, $x = \dfrac{2(t^2-1)}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{8t}{(1+t^2)^2}\,dt$ 이므로

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = \int \frac{8t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = 8\int\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)dt$$
$$= 8\tan^{-1}t - 8\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

이다. 이제 $\int \dfrac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$을 구하기 위해(이 부분에 대한 다른 풀이 $(*)$는 아래를 참조)

$t = \tan\theta$ 라 하면 $1+t^2 = \sec^2\theta$, $dt = \sec^2\theta\,d\theta$ 이므로

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{1}{\sec^4\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int \frac{1}{\sec^2\theta}d\theta = \int \cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C = \frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}t + \frac{t}{1+t^2}\right) + C$$

이다. 따라서

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = 4\tan^{-1}t - \frac{4t}{1+t^2} + C$$
$$= 4\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} - \frac{\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}}{1+\dfrac{2+x}{2-x}}\right) + C$$
$$= 4\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} - \sqrt{4-x^2} + C$$

$(*)\int \dfrac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$ 를 아래에 주어진 점화식을 이용하여 구할 수 있다.

자연수 n에 대해 $\int \dfrac{1}{(1+t^2)^n}\,dt = I_n$으로 두면

점화식 $I_n = \dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}$이 알려져 있다.

여기서 $n=2$를 대입하면

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{t}{(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt$$
$$= \frac{1}{2}\frac{t}{(1+t^2)} + \frac{1}{2}tan^{-1}t + C$$

을 얻는다.

13.함수 $f(x)=\ln\ x$ 의 $x=3$ 근방에서의 테일러 급수를 구하고, 이 급수의 수렴구간을 구하여라.

풀이: 함수 $f(x)=\ln\ x$의 $x=3$ 근방에서의 테일러 급수는 다음과 같이 주어진다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(3)\frac{(x-3)^n}{n!}.$$

$f^{(n)}(3)$을 구하기 위해 주어진 함수의 고차 도함수를 다음과 같이 구한다.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f^{(2)}(x)=-x^{-2}$, $f^{(3)}(x)=2x^{-3}$, $f^{(4)}(x)=(-3)2x^{-4}$

으로부터 $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}(n\geq 1)$을 얻는다.

따라서 $f^{(n)}(3)=(-1)^{n-1}(n-1)!3^{-n}(n\geq 1)$이고, $x=3$ 근방에서 f의 테일러 급수는

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-3)^n \text{이다.}$$

이 멱급수의 수렴구간을 구하기 위해 $a_{n=}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-3)^n$ 라고 두자.

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3(n+1)}|x-3|=\dfrac{|x-3|}{3}$ <1일 때 비판정법에 의해 이 멱급수는 (절대)수렴한다. 이제 $|x-3|=3$인 두 점 $x=0,x=6$에서 이 멱급수의 수렴여부를 확인하자.

(i) $x=0$: $\dfrac{1}{\ln 3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(-3)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$는 p=1인 p-급수(또는 조합급수)이므로 발산한다.

(ii) $x=6$: $\dfrac{1}{\ln 3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}3^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$는 교대급수 판정법에 의해 수렴한다.

따라서 수렴구간은 $(0,6]$이다.

14. 양의 정수 n에 대해 특이적분으로 정의된 다음 함수는 수렴함을 알고 있다.

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$$

이때, 모든 양의 정수 n 에 대해, $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$임을 보이고, 이를 이용하여 $\Gamma(n+1)=n!$ 임을 보여라.

풀이:

(1) 먼저 특이적분의 정의와 부분적분법을 이용하여 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$임을 보이자.

양의 정수 n 에 대해 $\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty} t^n e^{-t}dt=\lim_{M\to\infty}\int_0^M t^n e^{-t}dt$으로 주어진다.

부분적분법을 적용하기 위해 $u=t^n$ and $v^{'}=e^{-t}$으로 두면 $u^{'}=nt^{n-1}$ $v=-e^{-t}$이다

따라서 $\Gamma(n+1)=\lim_{M\to\infty}[-t^n e^{-t}]_0^M+n\int_0^M t^{n-1}e^{-t}dt$

$$=n\lim_{M\to\infty}\int_0^M t^{n-1}e^{-t}dt\left(\because \lim_{M\to\infty}[-t^n e^{-t}]_0^M=\lim_{M\to\infty}-\frac{M^n}{e^M}=0\right)$$

$$=n\Gamma(n)\ (\because \Gamma(n)\text{의 정의에 의해})$$

(2) (1)번의 사실을 계속 적용하면

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-2)=\cdots=n(n-1)\cdots 2\Gamma(1)$을 얻는다.

이제 $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=\lim_{M\to\infty}[-e^{-t}]_0^M=\lim_{M\to\infty}1-e^{-M}=1$이므로 $\Gamma(n+1)=n!$이 나온다.

15. 함수 $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}x}{1-2x^2}$의 $x=0$ 근방에서의 테일러 급수가 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$일 때, 계수 a_1, a_3, a_5 를 구하여라.

풀이: 등식 $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}x}{1-2x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$으로부터 $\tan^{-1}x=(1-2x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$을 얻는다.

함수 $\tan^{-1}x$의 매클로린 급수 $\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$을 위 등식에 대입하여 양변에 있는 멱급수의 계수를 비교한다:

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=(1-2x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n+2}$$

이 등식으로부터 주어진 차수의 계수를 얻는다.

상수항: $0=a_0$

x의 계수: $1=a_1 \Rightarrow a_1=1$

x^2의 계수: $0=a_2-2a_0 \Rightarrow a_2=0$

x^3의 계수: $-\dfrac{1}{3}=a_3-2a_1 \Rightarrow a_3=\dfrac{5}{3}$

x^4의 계수: $0=a_4-2a_2 \Rightarrow a_4=0$

x^5의 계수: $\dfrac{1}{5}=a_5-2a_3 \Rightarrow a_5=\dfrac{53}{15}$

따라서 구하는 계수는 $a_1=1$, $a_3=\dfrac{5}{3}$, $a_5=\dfrac{53}{15}$이다.