2011학년도 1학기 (기말고사)		학 과				감독교수확인
과 목 명	일반수학1	학 번				
출제교수명	공 동	교수명		분 반		
시 험 일 시	2011.6.13 월요일 (오전 10:00~11:40)	성 명			점 수	

1번~10번의 문제는 단답형으로 각 문제당 배점은 5점이며 부분점수가 없다. <u>주어진 상자 안에 답만 쓸 것.</u>

1. 두 함수 $f(x)=\sin^{-1}x$, $g(x)=\cos^{-1}x$ 의 치역을 각각 구하여라.

답: f의 치역: g의 치역:

2. $\sin(2\tan^{-1}(\frac{1}{3}))+\cos(2\tan^{-1}(\frac{1}{3}))$ 을 구하여라.

답:

3. 다음 급수들의 절대수렴, 조건수렴을 판정하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$

답: (1) (2)

4. 다음 급수가 수렴하기 위한 a값을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n+4}-\frac{1}{n+21}\right)$$

답:

5. 부정적분 $\int \tan^5 x dx$ 을 구하여라.

답:

6. 정적분 $\int_0^{\ln 2} e^x \sinh x dx$을 구하여라.

답:

7. 정적분 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1+\cos\theta}{1-\sin\theta}\, d\theta$ 을 구하여라.

답:

8. 특이적분 $\int_0^2 x \ln x\, dx$ 을 구하여라.

답:

2011학년도 1학기 (기말고사)		학 과				감독교수확인
과 목 명	일반수학1	학 번				
출제교수명	공 동	교수명		분 반		
시 험 일 시	2011.6.13 월요일 (오전 10:00~11:40)	성 명			점 수	

9. 정적분 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^4+4x^2+3}\,dx$ 을 구하여라.

답:

10. 함수 $\ln(1+x)$ 의 매클로린 급수를 이용하여, 다음 무한급수의 합을 구하여라.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}+\frac{1}{160}+\cdots$$

답:

11번~15번의 문제는 서술형으로 각 문제당 배점은 10점이다. 풀이과정을 쓸 것.

11. 다음 급수들의 수렴 여부를 판정하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$

12. 부정적분 $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$ 을 구하여라.

13. 함수 $f(x)=\ln x$ 의 $x=3$ 근방에서의 테일러 급수를 구하고, 이 급수의 수렴구간을 구하여라.

2011학년도 1학기 (기말고사)		학 과				감독교수확인
과 목 명	일반수학1	학 번				
출제교수명	공 동	교수명		분 반		
시 험 일 시	2011.6.13 월요일 (오전 10:00~11:40)	성 명			점 수	

14. 양의 정수 n에 대해 특이적분으로 정의된 다음 함수는 수렴함을 알고 있다.

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$$

이때, 모든 양의 정수 n 에 대해, $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$임을 보이고, 이를 이용하여 $\Gamma(n+1)=n!$ 임을 보여라.

15. 함수 $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}x}{1-2x^2}$의 $x=0$ 근방에서의 테일러 급수가 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$일 때, 계수 a_1, a_3, a_5 를 구하여라.

2011년도 일반수학 1 기말고사 해답

단답식:

1. f의 치역: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$　　g의 치역: $[0, \pi]$
2. $1.4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$
3. (1) 조건(부)수렴　(2) 절대수렴
4. $a = 1$
5. $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$　또는　$\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + C$
6. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$
7. $1 + \ln 2$
8. $-1 + 2\ln 2$
9. $\frac{1}{4}\ln 2$
10. $\ln\frac{3}{2}$　또는　$\ln 3 - \ln 2$

주관식:

11. 다음 급수들의 수렴 여부를 판정하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$

풀이:

(1) $a_n = \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 으로 두자.

극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 을 구하기 위해 $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 으로 놓자.

$n\to\infty$ 일 때 $x\to 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 는 $p = \frac{1}{2}$ 인 $p-$급수이므로($p<1$) 발산한다.

따라서 극한비교 판정법에 의해 주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 는 발산한다.

(2) 모든 자연수 n에 대해

$nln(n+1) \le (n+1)\ln(n+1)$ 으므로 $\frac{1}{nln(n+1)} \ge \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

적분판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 가 발산함을 보이자. 이 급수에 대응하는 특이적분은 치환적분 $t = \ln x$에 의해

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x\ln x} dx == \lim_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t} dt = \lim_{b\to\infty} \ln\ln b - \ln\ln 2 = \infty$$

이므로 발산한다. 그러므로 비교판정법에 의해 주어진 급수는 발산한다.

참고: 풀이와 다른 판정법을 사용할 수 있음에 유의한다.

12. 부정적분 $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$ 을 구하여라.

풀이: $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = t$ 라 하면, $x = \frac{2(t^2-1)}{1+t^2}$, $dx = \frac{8t}{(1+t^2)^2}\,dt$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx &= \int \frac{8t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = 8\int\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)dt \\ &= 8\tan^{-1}t - 8\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt\end{aligned}$$

이다. 이제 $\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$을 구하기 위해(이 부부에 대한 다른 풀이 (*)는 아래를 참조)

$t = \tan\theta$ 라 하면 $1+t^2 = \sec^2\theta$, $dt = \sec^2\theta\,d\theta$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt &= \int \frac{1}{\sec^4\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C = \frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}t + \frac{t}{1+t^2}\right) + C\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx &= 4\tan^{-1}t - \frac{4t}{1+t^2} + C \\ &= 4\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} - \frac{\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}}{1+\frac{2+x}{2-x}}\right) + C \\ &= 4\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} - \sqrt{4-x^2} + C\end{aligned}$$

(*) $\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$ 를 아래에 주어진 점화식을 이용하여 구할 수 있다.

자연수 n에 대해 $\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt = I_n$으로 두면

점화식 $I_n = \frac{1}{2(n-1)}\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}$이 알려져 있다.

여기서 $n=2$를 대입하면

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{2}\frac{t}{(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{t}{(1+t^2)} + \frac{1}{2}tan^{-1}t + C\end{aligned}$$

을 얻는다.

13.함수 $f(x)=\ln\ x$ 의 $x=3$ 근방에서의 테일러 급수를 구하고, 이 급수의 수렴구간을 구하여라.

풀이: 함수 $f(x)=\ln\ x$의 $x=3$ 근방에서의 테일러 급수는 다음과 같이 주어진다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(3)\frac{(x-3)^n}{n!}.$$

$f^{(n)}(3)$을 구하기 위해 주어진 함수의 고차 도함수를 다음과 같이 구한다.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f^{(2)}(x)=-x^{-2}$, $f^{(3)}(x)=2x^{-3}$, $f^{(4)}(x)=(-3)2x^{-4}$

으로부터 $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}(n\geq 1)$을 얻는다.

따라서 $f^{(n)}(3)=(-1)^{n-1}(n-1)!3^{-n}(n\geq 1)$이고, $x=3$ 근방에서 f의 테일러 급수는

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-3)^n$$ 이다.

이 멱급수의 수렴구간을 구하기 위해 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-3)^n$ 라고 두자.

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3(n+1)}|x-3|=\dfrac{|x-3|}{3}<1$일 때 비판정법에 의해 이 멱급수는 (절대)수렴한다. 이제 $|x-3|=3$인 두 점 $x=0, x=6$에서 이 멱급수의 수렴여부를 확인하자.

(i) $x=0$: $\dfrac{1}{\ln 3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(-3)^n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$는 p=1인 p-급수(또는 조합급수)이므로 발산한다.

(ii) $x=6$: $\dfrac{1}{\ln 3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n3^n}3^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$는 교대급수 판정법에 의해 수렴한다.

따라서 수렴구간은 (0,6]이다.

14. 양의 정수 n에 대해 특이적분으로 정의된 다음 함수는 수렴함을 알고 있다.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

이때, 모든 양의 정수 n 에 대해, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$임을 보이고, 이를 이용하여 $\Gamma(n+1) = n!$ 임을 보여라.

풀이:

(1) 먼저 특이적분의 정의와 부분적분법을 이용하여 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$임을 보이자.

양의 정수 n 에 대해 $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M t^n e^{-t} dt$으로 주어진다.

부분적분법을 적용하기 위해 $u = t^n$ and $v' = e^{-t}$으로 두면 $u' = nt^{n-1}$ $v = -e^{-t}$이다

따라서 $\Gamma(n+1) = \lim_{M\to\infty} [-t^n e^{-t}]_0^M + n\int_0^M t^{n-1} e^{-t} dt$

$$= n \lim_{M\to\infty} \int_0^M t^{n-1} e^{-t} dt (\because \lim_{M\to\infty} [-t^n e^{-t}]_0^M = \lim_{M\to\infty} -\frac{M^n}{e^M} = 0)$$

$$= n\Gamma(n)$$ ($\because$ $\Gamma(n)$의 정의에 의해)

(2) (1)번의 사실을 계속 적용하면

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = n(n-1)\cdots 2\Gamma(1)$을 얻는다.

이제 $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{M\to\infty} [-e^{-t}]_0^M = \lim_{M\to\infty} 1 - e^{-M} = 1$이므로 $\Gamma(n+1) = n!$이 나온다.

15. 함수 $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}x}{1-2x^2}$의 $x=0$ 근방에서의 테일러 급수가 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$일 때, 계수 a_1, a_3, a_5 를 구하여라.

풀이: 등식 $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}x}{1-2x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$으로부터 $\tan^{-1}x=(1-2x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$을 얻는다.

함수 $\tan^{-1}x$의 매클로린 급수 $\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$을 위 등식에 대입하여 양변에 있는 멱급수의 계수를 비교한다:

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=(1-2x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+2}$$

이 등식으로부터 주어진 차수의 계수를 얻는다.

상수항: $0=a_0$

x의 계수: $1=a_1 \Rightarrow a_1=1$

x^2의 계수: $0=a_2-2a_0 \Rightarrow a_2=0$

x^3의 계수: $-\dfrac{1}{3}=a_3-2a_1 \Rightarrow a_3=\dfrac{5}{3}$

x^4의 계수: $0=a_4-2a_2 \Rightarrow a_4=0$

x^5의 계수: $\dfrac{1}{5}=a_5-2a_3 \Rightarrow a_5=\dfrac{53}{15}$

따라서 구하는 계수는 $a_1=1$, $a_3=\dfrac{5}{3}$, $a_5=\dfrac{53}{15}$이다.