1. $2\sqrt{2}$

2. 8π

3. $y=\sqrt{3}x-2$

4. $\left\langle -\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right\rangle$

5. $\sqrt{2}$

6. $\sqrt{10-4\sqrt{2}}$

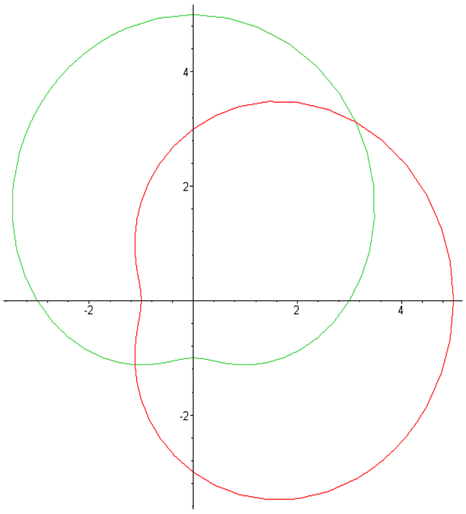
7. $7\sqrt{5}$

8. -2

9. $\frac{\sqrt{26}}{2}$

10. $-\sqrt{3}$

11. 극방정식 $r=3+2\cos\theta$와 $r=3+2\sin\theta$의 그래프를 그리고, 두 극방정식의 공통 내부 영역의 넓이를 구하여라.



교점의 각좌표는 $3+2\cos\theta=3+2\sin\theta$ 에서 $\theta=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$ 이다.

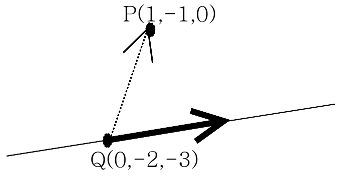
따라서, 구하는 면적은

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{2}(3+2\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 9+12\cos\theta+4\cos^2\theta\, d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 11+12\cos\theta+2\cos 2\theta\, d\theta \\ &= 11\pi-12\sqrt{2} \end{aligned}$$

이다.

12. 두 평면 $2x+y-2z=4$, $3x-4y\ +z\ =5$의 교선을 L이라 하면, 직선 L과 점 $P(1,-1,0)$을 포함하는 평면의 방정식을 구하여라.

교선 L의 방향벡터는 $\vec{v}=<2,1,-2>\times<3,-4,1>=<-7,-8,-11>$이다.
또한, 교선 위에 있는 임의의 한 점을 Q라 하고, Q를 구하면, - 예를 들어 yz평면과 만나는 점은 - $Q(0,-2,-3)$ 이다.



이 때, $\overrightarrow{QP}=<1,1,3>$이고, 구하는 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=\overrightarrow{QP}\times\vec{v}=<13,-10,-1>$ 이다.
따라서 구하는 평면의 방정식은 $\vec{n}=<13,-10,-1>$을 법선벡터로 가지고 점$P(1,-1,0)$을 포함하므로

$$13(x-1)-10(y+1)-z=0,$$
$$13x-10y-z-23=0$$

이다.

13. 무한히 미분 가능한 함수 $z=f(x,y)$, $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$에 대하여, $(u,v)=(1,1)$에서 g, h의 함숫값은 $x=g(1,1)=0$ 이고 $y=h(1,1)=0$이다. $(x,y)=(0,0)$에서 f의 편미분 값과 $(u,v)=(1,1)$에서 g, h의 편미분 값이 다음 표와 같을 때, $(u,v)=(1,1)$에서 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$을 구하여라.

$\frac{\partial z}{\partial x}$	1	$\frac{\partial x}{\partial u}$	2	$\frac{\partial y}{\partial u}$	-1
$\frac{\partial z}{\partial y}$	3	$\frac{\partial x}{\partial v}$	-1	$\frac{\partial y}{\partial v}$	2
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$	-1	$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$	1	$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$	2
$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$	-2	$\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$	-2	$\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$	1
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	1	$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$	-1	$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$	-1

연쇄 법칙을 이용하면, z의 u에 대한 편미분은

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\end{aligned}$$

이고, $(u,v)=(1,1)$에서

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=12$$

이다. 같은 방법으로

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} =& \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}\end{aligned}$$

이고, $(u,v)=(1,1)$에서

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}=-9$$

이다.

14. $f(x,y)=3xy-x^2y-xy^2$ 의 모든 임계점을 구하고 분류하여라.

f의 1차, 2차 편도함수를 계산하면,

$$f_x = 3y-2xy-y^2 \quad , \quad f_y = 3x-x^2-2xy \; ,$$
$$f_{xx} =-2y \quad , \quad f_{xy} = 3-2x-2y \quad , \quad f_{yy} =-2x$$

이다. $f_x = y(3-2x-y)=0$, $f_y = x(3-x-2y)=0$ 에서 임계점을 찾으면,

$$(0,0),\ (3,0),\ (0,3),\ (1,1)$$

이다.

점$(0,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$ 에서

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 =-9<0$$

이므로 안장점이고 , 점$(1,1)$ 에서

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 3>0 \text{ 이고 } f_{xx}(1,1) = \ -2>0$$

이므로 극댓값을 갖는다.

15. 영역 D를 xy-평면에서 세 점 (0,0), (6,0), (0,6)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 영역(경계선 포함)이라 하자. 함수 $f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ 의 D에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

① f의 1차 편도함수를 구하면,

$$f_x = 4y^2 - 2xy^2 - y^3 = y^2(4-2x-y) \ , \ f_y = 8xy - 2x^2y - 3xy^2 = xy(8-2x-3y)$$

이다. 영역D의 내부에서 $f_x = 0$, $f_y = 0$ 을 만족하는 점을 찾으면, (1,2) 이다. 이 때, 함숫값은 $f(1,2) = 4$ 이다.

② (0,0)과 (6,0)을 잇는 선분:
$y = 0$ $(0 \le x \le 6)$ 로 표현할 수 있으며, 이 때 함숫값은 $f(x,0) = 0$ 이다.

③ (0,0)과 (0,6)을 잇는 선분:
$x = 0$ $(0 \le y \le 6)$ 로 표현할 수 있으며, 이 때 함숫값은 $f(0,y) = 0$ 이다.

④ (0,6)과 (6,0)을 잇는 선분:
$x = -y + 6$ $(0 \le y \le 6)$ 로 표현할 수 있으며, 이 때

$$f(-y+6, y) = y^2(2y-12) = 2y^3 - 12y^2$$

이다. 여기서, $\frac{d}{dy}(2y^3 - 12y^2) = 6y^2 - 24y = 6y(y-4) = 0$ 인 점은 $y = 0$, $y = 4$ 이므로 (0,6), (2,4) 그리고, 끝점 (6,0)에서 함숫값을 계산하면,

$$f(0,6) = 0 \ , \ f(2,4) = -64 \ , \ f(6,0) = 0$$

이다.

①-④에서, 점 (2,4)에서 최솟값 -64, 점 (1,2)에서 최댓값 4를 갖는다.