1. (a) 1 (b) -1

2. 1/8

3. 8

4. 1/3

5. $\left(\frac{2}{\sqrt{70}}, \frac{10}{\sqrt{70}}\right)$

6. $e-1$

7. 2 ln 2 -1

8. $2\sqrt{2}$

9. 8π

10. 17/6

11. 미적분학의 기본정리를 이용하여 좌변을 정리하면,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt &= \frac{d}{dx}\left(x^2\int_0^{x^2}f(t)dt-\int_0^{x^2}tf(t)dt\right)\\ &= 2x\int_0^{x^2}f(t)dt+2x^3f(x^2)-2x^3f(x^2)\\ &= 2x\int_0^{x^2}f(t)dt\end{aligned}$$

이다. 따라서 주어진 식을 이용하면,

$$2x\int_0^{x^2}f(t)dt=4-\int_0^{x^2}f(t)dt$$

이므로

$$\int_0^{x^2}f(t)dt=\frac{4}{2x+1}$$

이다. 따라서 구하는 정적분의 값은 $x=2$ 인 경우이므로,

$$\int_0^4 f(t)dt=\frac{4}{5}$$

이다.

12. 그림과 같이 복도의 한 면과 막대기가 이루는 각도를 θ라 하면, 운반할 수 있는 막대의 최대 길이는 $256\csc\theta + 108\sec\theta$을 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$의 범위에서 최솟값을 구하는 것이다.

$f(\theta) = 256\csc\theta + 108\sec\theta$ 라 하면,

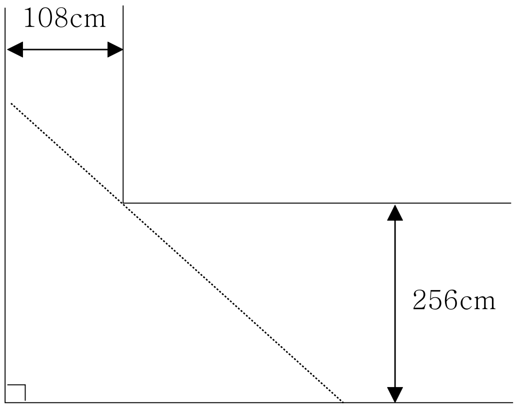
$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -256\csc\theta\cot\theta + 108\sec\theta\tan\theta \\ &= \frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(27\tan^3\theta - 64\right) \end{aligned}$$

이다.

극값을 구하기 위하여 $f'(\theta) = 0$을 풀면, $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$일 때, $f'(\theta) = 0$ 이다.

이때 θ 값을 θ_c라 하고, $f'(\theta)$의 부호를 주어진 구간에서 살펴보면, $\theta = \theta_c$ 일 때, 최솟값을 가짐을 알 수 있다.

$\tan\theta_c = \dfrac{4}{3}$ 일 때, $\csc\theta_c = \dfrac{5}{4}$, $\sec\theta_c = \dfrac{5}{3}$ 이므로 최솟값은 $f(\theta_c) = 500\,(cm)$이다.



13. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^{-3}$이므로

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy = \frac{1}{2}(y^3 + y^{-3})dy$$

이다. 따라서 구하는 회전곡면의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_1^2 2\pi y\, ds &= \int_1^2 \pi(y^4 + y^{-2})dy \\ &= \pi\left[\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{y}\right]_1^2 = \frac{67}{10}\pi\end{aligned}$$

이다.

14. 원통각법을 이용하여 입체의 부피를 계산하면,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} 2\pi(x+2)(2+\sin x)dx &= 2\pi\int_{\pi}^{2\pi}(2x+x\sin x+4+2\sin x)dx \\ &= 2\pi\left[x^2 - x\cos x + \sin x + 4x - 2\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= 2\pi(3\pi^2+\pi-4) \\ &= 6\pi^3+2\pi^2-8\pi\end{aligned}$$

이다.

15. x 절편: y=0을 풀면, x=6.

y 절편: x=0을 대입하면 y=3/4

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x-6}{(x+2)(x-4)}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x-6}{(x+2)(x-4)}=0$ 이므로 $y=0$는 수평 점근선이다.

$\lim_{x\to-2^-}\dfrac{x-6}{(x+2)(x-4)}=-\infty$, $\lim_{x\to-2^+}\dfrac{x-6}{(x+2)(x-4)}=\infty$ 이므로 x=-2 는 수직 점근선이다.

$\lim_{x\to4^-}\dfrac{x-6}{(x+2)(x-4)}=\infty$, $\lim_{x\to4^+}\dfrac{x-6}{(x+2)(x-4)}=-\infty$ 이므로 x=4 는 수직 점근선이다.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x^2+12x-20}{(x+2)^2(x-4)^2}=-\dfrac{(x-2)(x-10)}{(x+2)^2(x-4)^2}$ 이므로 $x=2,10$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=0$ 이다.

미분한 함수의 부호를 조사하면,

구간 $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(10,\infty)$에서 $\dfrac{dy}{dx}<0$ 이므로 감소함수이며,

구간 (2,4), (4,10) 에서 $\dfrac{dy}{dx}>0$ 이므로 증가함수 이다.

따라서 $x=2$에서 극소값 $\dfrac{1}{2}$을 가지며, $x=10$에서 극대값 $\dfrac{1}{18}$을 가진다. 이것을 종합하여 그래프를 그리면 다음과 같다.