2010학년도 1학기 (중간고사)		학 과		감독교수확인
과 목 명	일반수학1	학 년		
출제교수명	공 동	학 번		
시 험 일 시	2010.4.21 수요일 (오전 10:00~11:40)	성 명		점 수

1번~10번의 문제는 단답형으로 각 문제당 배점은 5점이며 부분점수가 없다. <u>주어진 상자 안에 답만 쓸 것.</u>

1. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x<0 \end{cases}$, $g(x)=\dfrac{x}{\cos x}$ 일 때,

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(g(x))$과 (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(g(x))$을 각각 구하여라.

답: (a) (b)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\tan x}-\sqrt{4+\sin x}}{x^3}$을 구하여라.

답:

3. 곡선 $y^2\ln y=\dfrac{x}{2}\ln x$ 위의 점 $(2, \sqrt{2})$에서 이 곡선에 접하는 직선의 기울기를 $\dfrac{1}{m}$이라 하면, m^2은 정수이다. 이 때, 정수 m^2을 구하여라.

답:

4. $f(x)=2x+\sin x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$를 구하여라.

답:

5. 곡선 $5x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$ 위의 점 중에서 수평접선을 갖는 점의 좌표를 구하여라. (단, 1사분면에 있는 점)

답:

6. 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, e^{\cos^2 x} dx$ 의 값을 구하여라.

답:

7.극한 $\lim_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}+\ln\sqrt[n]{\frac{n+2}{n}}+\cdots+\ln\sqrt[n]{\frac{n+n}{n}}\right)$의 값을 구하여라.

답:

8. 어떤 물체가 $t=0$일 때 출발하여 직선을 따라 $v(t)=t^3-4t$의 속도로 움직인다. 이 물체가 움직인 총 거리가 8이 되기까지 걸리는 시간을 구하여라.

답:

2010학년도 1학기 (중간고사)		학 과		감독교수확인	
과 목 명	일반수학1	학 년			
출제교수명	공 동	학 번			
시 험 일 시	2010.4.21 수요일 (오전 10:00~11:40)	성 명		점 수	

9. 좌표평면에서 집합

$$A=\{(x,y)\mid y\le x,\ y\ge 0,\ (x-2)^2+y^2\le 4\}$$

가 나타내는 영역을 x축으로 회전시켰을 때, 만들어지는 회전체의 부피를 구하여라.

답:

10. $24xy=x^4+48\ (2\le x\le 4)$로 주어진 곡선의 길이를 구하여라.

답:

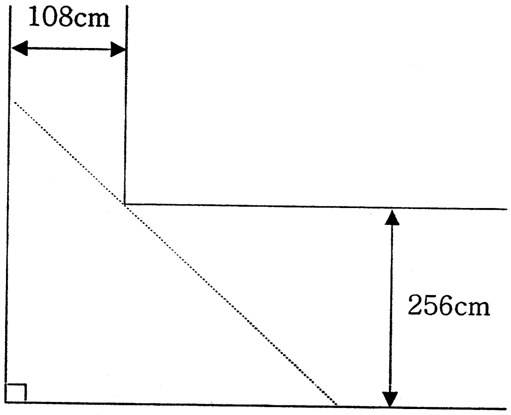
11번~15번의 문제는 서술형으로 각 문제당 배점은 10점이다. 풀이과정을 쓸 것.

11. 임의의 양수 x에 대하여 연속함수 $f(x)$는

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt=4-\int_0^{x^2}f(t)dt$$ 을 만족한다.

이 때 $\int_0^4 f(t)dt$의 값을 구하여라.

12. 그림에서처럼 폭이 108cm인 복도와 256cm인 복도가 직각을 이루며 만나고 있다. 긴 막대기를 세우지 않고 눕혀서 복도를 따라 운반한다고 할 때, 운반 가능한 막대의 최대 길이를 구하여라.



13. 두 점 $(\frac{3}{8},1)$, $(\frac{33}{16},2)$을 잇는 곡선 $x=\frac{1}{8}y^4+\frac{1}{4y^2}$을 x축 중심으로 회전시켰을 때, 생기는 회전체의 겉넓이를 구하여라.

2010학년도 1학기 (중간고사)		학 과		감독교수확인	
과 목 명	일반수학1	학 년			
출제교수명	공 동	학 번			
시 험 일 시	2010.4.21 수요일 (오전 10:00~11:40)	성 명		점 수	

14. $y=2+\sin x$, $y=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$로 둘러싸인 영역을 직선 $x=-2$를 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하여라.

15. 좌표평면 위에 $y=\dfrac{x-6}{(x+2)(x-4)}$의 그래프의 개형을 그려라. (이 곡선의 x-절편, y-절편, 극대점, 극소점, 점근선이 있으면 정확하게 표시하여라.)

1. (a) 1 (b) -1

2. 1/8

3. 8

4. 1/3

5. $\left(\frac{2}{\sqrt{70}}, \frac{10}{\sqrt{70}}\right)$

6. $e-1$

7. 2 ln 2 -1

8. $2\sqrt{2}$

9. 8π

10. 17/6

11. 미적분학의 기본정리를 이용하여 좌변을 정리하면,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt &= \frac{d}{dx}\left(x^2\int_0^{x^2}f(t)dt-\int_0^{x^2}tf(t)dt\right)\\ &= 2x\int_0^{x^2}f(t)dt+2x^3f(x^2)-2x^3f(x^2)\\ &= 2x\int_0^{x^2}f(t)dt\end{aligned}$$

이다. 따라서 주어진 식을 이용하면,

$$2x\int_0^{x^2}f(t)dt=4-\int_0^{x^2}f(t)dt$$

이므로

$$\int_0^{x^2}f(t)dt=\frac{4}{2x+1}$$

이다. 따라서 구하는 정적분의 값은 $x=2$ 인 경우이므로,

$$\int_0^4 f(t)dt=\frac{4}{5}$$

이다.

12. 그림과 같이 복도의 한 면과 막대기가 이루는 각도를 θ라 하면, 운반할 수 있는 막대의 최대 길이는 $256\csc\theta+108\sec\theta$을 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$의 범위에서 최솟값을 구하는 것이다.

$f(\theta)=256\csc\theta+108\sec\theta$ 라 하면,

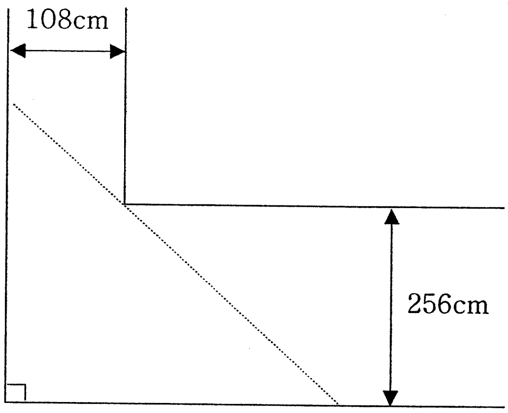
$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -256\csc\theta\cot\theta+108\sec\theta\tan\theta \\ &= \frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}(27\tan^3\theta-64) \end{aligned}$$

이다.

극값을 구하기 위하여 $f'(\theta)=0$을 풀면, $\tan\theta=\frac{4}{3}$일 때, $f'(\theta)=0$ 이다.

이때 θ 값을 θ_c라 하고, $f'(\theta)$의 부호를 주어진 구간에서 살펴보면, $\theta=\theta_c$ 일 때, 최솟값을 가짐을 알 수 있다.

$\tan\theta_c=\frac{4}{3}$ 일 때, $\csc\theta_c=\frac{5}{4}$, $\sec\theta_c=\frac{5}{3}$ 이므로 최솟값은 $f(\theta_c)=500(cm)$이다.



13. $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2}y^3-\dfrac{1}{2}y^{-3}$이므로

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy=\frac{1}{2}(y^3+y^{-3})dy$$

이다. 따라서 구하는 회전곡면의 넓이는

$$\int_1^2 2\pi y\,ds=\int_1^2 \pi(y^4+y^{-2})dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{y}\right]_1^2=\frac{67}{10}\pi$$

이다.

14. 원통각법을 이용하여 입체의 부피를 계산하면,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} 2\pi(x+2)(2+\sin x)dx &= 2\pi\int_{\pi}^{2\pi}(2x+x\sin x+4+2\sin x)dx \\ &= 2\pi\left[x^2-x\cos x+\sin x+4x-2\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= 2\pi(3\pi^2+\pi-4) \\ &= 6\pi^3+2\pi^2-8\pi\end{aligned}$$

이다.

15. x 절편: y=0을 풀면, x=6.

y 절편: x=0을 대입하면 y=3/4

$\lim_{x\to\infty}\frac{x-6}{(x+2)(x-4)}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-6}{(x+2)(x-4)}=0$ 이므로 $y=0$는 수평 점근선이다.

$\lim_{x\to-2^-}\frac{x-6}{(x+2)(x-4)}=-\infty$, $\lim_{x\to-2^+}\frac{x-6}{(x+2)(x-4)}=\infty$ 이므로 x=-2 는 수직 점근선이다.

$\lim_{x\to4^-}\frac{x-6}{(x+2)(x-4)}=\infty$, $\lim_{x\to4^+}\frac{x-6}{(x+2)(x-4)}=-\infty$ 이므로 x=4 는 수직 점근선이다.

$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^2+12x-20}{(x+2)^2(x-4)^2}=-\frac{(x-2)(x-10)}{(x+2)^2(x-4)^2}$ 이므로 $x=2,10$일 때 $\frac{dy}{dx}=0$ 이다.

미분한 함수의 부호를 조사하면,

구간 $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(10,\infty)$에서 $\frac{dy}{dx}<0$ 이므로 감소함수이며,

구간 (2,4), (4,10) 에서 $\frac{dy}{dx}>0$ 이므로 증가함수 이다.

따라서 $x=2$에서 극소값 $\frac{1}{2}$을 가지며, $x=10$에서 극대값 $\frac{1}{18}$을 가진다. 이것을 종합하여 그래프를 그리면 다음과 같다.