1. $-\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$

2. (a) (b) (d)

3. $x^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

4. $2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$

5. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin(2x)-\frac{1}{8}\cos(2x)+C$

$$\left(=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\sin x\cos x-\frac{1}{8}\cos(2x)+C=\cdots\cdots\cdots\right)$$

6. $2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{3}\tan^3\left(\frac{x}{2}\right)+C$

$$\left(=\frac{4}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{3}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C=\cdots\cdots\cdots\right)$$

7. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2e^x-1}{e^x+1}\right|+C$

8. $-\frac{1}{320}+\frac{9}{10}I$

9. (a) (b)

10. (b) (c)

11. $u=\sin^{-1}x$, $dv=x\,dx$ 이라 하고 부분 적분법을 이용하면,

$$\int x\sin^{-1}x\,dx=\frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

이다. 이 때, $x=\sin\theta$를 치환하면,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta d\theta = \int\sin^2\theta\,d\theta=\int\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta\\ &=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin(2\theta)+C=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+C\\ &=\frac{1}{2}\sin^{-1}x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\int x\sin^{-1}x\,dx=\frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x-\frac{1}{4}(\sin^{-1}x-x\sqrt{1-x^2})+C$$

이다.

12. 부분 분수를 이용하면, 주어진 적분은

$$\int \frac{x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \int \frac{x}{(x^2+2x+2)}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$$
$$= \int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+2x+2)}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$$

이다. 여기서 처음 두 개의 부정적분은 각각

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+2)}\,dx = \tan^{-1}(x+1)+C$$

이고, 마지막 부정적분은 $x+1=\tan\theta$ 로 치환하면,

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \int \frac{\sec^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}\,d\theta = \int \cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + C = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + C$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(x+1) + \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+2x+2} + C$$

이므로

$$\int \frac{x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x+1) + \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + C$$

이다.

13. (Ⅰ) $p=-1$ 일 때, $\ln x = u$ 로 치환하면,

$$\int x^{-1}\ln x\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

이므로,

$$\int_0^1 x^{-1}\ln x\,dx = \lim_{A\to 0^+}\int_A^1 x^{-1}\ln x dx = \lim_{A\to 0^+}\left[-\frac{1}{2}(\ln A)^2\right]$$

은 발산한다.

(Ⅱ) $p\neq -1$ 일 때, 부분 적분을 이용하면,

$$\int x^p\ln x\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln x - \frac{1}{p+1}\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln x - \frac{1}{(p+1)^2}x^{p+1} + C$$

이다. 따라서

$$\int_0^1 x^p\ln x\,dx = \lim_{A\to 0^+}\int_A^1 x^p\ln x dx = \lim_{A\to 0^+}\left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln x - \frac{1}{(p+1)^2}x^{p+1}\right]_A^1$$

이고, $p < -1$ 이면, 극한은 존재하지 않고, $p > -1$ 이면, 극한값은 $-\dfrac{1}{(p+1)^2}$ 이다.

(Ⅰ), (Ⅱ)에서, $p > -1$ 일 때, 주어진 특이 적분은 수렴하고, 그 값은 $-\dfrac{1}{(p+1)^2}$ 이다.

14.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{3^{n+1}(x-1)^{n+1}}{4\,(n+1)\ln(n+1)}}{\dfrac{3^n(x-1)^n}{4\,n\ln n}}\right| = \frac{3n(\ln n)|x-1|}{(n+1)\ln(n+1)}$$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3|x-1|$ 이다.

따라서 $3|x-1| < 1$ 일 때 수렴하고, $3|x-1| > 1$ 일 때 발산한다.

한편, $3|x-1| = 1$인 경우는 $x = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$이다.

$x = \frac{2}{3}$ 일 때, 주어진 수열은 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n\ln n}$이다.

$a_n = \frac{1}{4n\ln n}$이라 하면, $a_n > 0$ 이고 감소하는 수열이며, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이므로, 교대급수 판정법에 의해 수렴한다.

$x = \frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 수열은 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n\ln n}$이다.

$a_n = \frac{1}{4n\ln n}$이라 하면, $a_n > 0$ 이고 감소하는 수열이며, $\int_2^{\infty}\frac{1}{4x\ln x}dx$는 발산하므로, 적분 판정법에 의해 발산한다.

따라서 수렴구간은 $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 이다.

15. $|x|<1$ 에서 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 이므로, $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ 이다.

따라서 $$f(x)=\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)=\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x^2)^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(-x^2)^{n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n+1}x^{2n+2}$$
$$=2x^2+\frac{2}{3}x^6+\frac{2}{5}x^{10}+\frac{2}{7}x^{14}+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{4n+2}$$

이다. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 이라 하면, $f^{(n)}(0)=n!\,a_n$ 이므로,

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\frac{2(4k+2)!}{2k+1}, & \text{if } n=4k+2\ (k=0,1,2,\cdots)\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

이다. 따라서

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\frac{4(n)!}{n}=4(n-1)!, & \text{if } n=2,6,10,14,\cdots\cdots\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$