객관식 답

1) -1

2) $2\sqrt{3}$

3) 주면 $(1, \frac{3\pi}{4}, \sqrt{3})$, 구면 $(2, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4})$

4) 0

5) $(y-1)+\frac{1}{e}(z-e)=0$ 또는 $y+\frac{1}{e}z=2$

6) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

7) $x-y+z=0$

8) $\frac{1}{2}$

9) $< -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} >$

10) $\frac{11}{2}$

11) 세 개의 원 $r=1$, $r=2\cos\theta$와 $r=2\sin\theta$ 모두의 내부로 이루어진 영역의 넓이를 구하여라.

풀이)

$2\cos\theta = 2\sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, $\quad 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$, $\quad 2\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ (2점)

넓이 $A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^2 d\theta$ (6점)

또는 대칭성을 이용하면

$A = 2[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1)^2 d\theta]$ .... (6점)

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\, d\theta + (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 - \cos 2\theta\, d\theta + \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(10점)

12. 함수 $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,에서 f_{xy}와 f_{yx}는 존재하고 연속이다.

1) $(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2=(\frac{\partial f}{\partial r})^2+a(r)(\frac{\partial f}{\partial \theta})^2$ 을 만족하는 $a(r,\theta)$을 구하여라.

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=b(r,\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+c(r,\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+d(r,\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 을 만족하는 $b(r,\theta),c(r,\theta),d(r,\theta)$을 구하여라.

풀이)

1)

$f_r=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta, f_\theta=f_x(-r\sin\theta)+f_y(r\cos\theta)$ .... (2점)

$(f_r)^2=\cos^2\theta(f_x)^2+2\sin\theta\cos\theta f_xf_y+\sin^2\theta(f_y)^2$
$(f_\theta)^2=r^2\sin^2\theta(f_x)^2-2r^2\sin\theta\cos\theta f_xf_y+r^2\cos^2\theta(f_y)^2$

따라서

$$(f_r)^2+\frac{1}{r^2}(f_\theta)^2=(f_x)^2+(f_y)^2$$

그러므로 $a(r,\theta)=\frac{1}{r^2}$ .... (5점)

2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}(f_r)=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(f_x)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(f_y)$$ .... (7점)

$$=\cos^2\theta f_{xx}+2\sin\theta\cos\theta f_{xy}+\sin^2\theta f_{yy}$$

따라서

$b(r,\theta)=\cos^2\theta$
$c(r,\theta)=2\sin\theta\cos\theta$
$d(r,\theta)=\sin^2\theta$

(10점)

13. 두 점 $A(a,b,1)$와 $B(-1,a,b)$이 곡면 $x^4+2y^4+3z^4=6$ 위의 점 $C(1,1,1)$에서의 접평면 위에 있을 때 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

풀이)

$F(x,y,z) = x^4+2y^4+3z^4-6=0$ 라고 두자

$\nabla F(C) = <4,8,12>$이다.

따라서 접평면의 방정식은

$4(x-1)+8(y-1)+12(z-1)=0$ 즉 $x+2y+3z=6$ ....(4점)

두 점을 접평면에 대입하여 a,b를 구하면 $a=5, b=-1$이다. ....(6점)

$\overrightarrow{CA} = <4,-2,0>$, $\overrightarrow{CB} = <-2,4,-2>$ 를 생각하자

그러면 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\sqrt{14}$$ ....(10점)

14. 두 직선 $L_1 : x-1 = \frac{y+2}{3} =-(z-4)$와 $L_2 : \frac{x}{2} = y-3 = \frac{z+3}{4}$ 사이의 거리를 구하여라.

풀이)

직선 L_1, L_2의 방향벡터는 각각 $\vec{a} =< 1,3,-1 >, \vec{b} =< 2,1,4 >$이다. 따라서 두 직선은 평행하지 않다.

또한 그들의 매개방정식에서

$$\begin{cases} x = t+1 & = 2s \\ y = 3t-2 & = s+3 \\ z =-t+4 & = 4s-3 \end{cases}$$

를 만족하는 t, s가 존재하지 않는다. 즉 두 직선은 만나지도 않는다.

따라서 직선 L_1를 품는 평면과 L_2를 품는 평면은 평행하다. .... (5점)

두 평면에 수직인 벡터는

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} =< 13, -6, -5 >$ 이다.

이제 L_1위의 하나의 점 $A(1,-2,4)$와 L_2위의 하나의 점 $B(0,3,-3)$를 잡자.

$\overrightarrow{AB} =< -1, 5, -7 >$를 생각하면 두 직선 사이의 거리 d는

$d = |Comp_{\vec{n}} \overrightarrow{AB}| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{8}{\sqrt{230}}$ ....(10점)

15. 함수 $f(x,y)$는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-2y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

이 때 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$를 각각 구하여라.

(풀이)

먼저 편도함수의 정의를 이용하자.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$ 이고

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$ 이다. .... (4점)

또한

$$f_x=\frac{(3x^2y-2y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-2xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y=\frac{(x^3-6xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-2xy^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}(f_y)|_{(0,0)}=\lim_{h\to0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h}=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}(f_x)|_{(0,0)}=\lim_{h\to0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{-2h^5}{h^4}-0}{h}=-2$$

(10점)