2009년 일반 수학 2 기말 고사 모범답안

1. $\dfrac{80}{3}$

2. $0, \langle -1,-1,-1 \rangle$ 혹은 $- < 1, 1, 1 >$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

4. $\dfrac{\sqrt{22}}{4}$

5. 4π

6. $x^2 + \sin xy + C$

7. $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$

8. 2π

9. $\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi, 0\right)$ 혹은 $\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi, 0\right)$, n은 정수, 안장점.

10. 최대값: $e^{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$, 최소값: $e^{-\frac{3\sqrt{3}}{8}}$.

11. 그린정리에 의해

$$\int_C ydx + 2xdy = \iint_D -1 + 2\, dA$$ (5점)

$$\iint_D 1\, dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 1\, dydx = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}$$ (10점)

12. $g(x,y,z) = xyz^2 - 8 = 0$을 제약조건으로
$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$이 최소값을 갖는 점을 구하면 충분하다. (2점)

$\nabla f = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$
$\nabla g = \langle yz^2, xz^2, 2xyz \rangle$

제약조건에 의해 $\nabla g \neq \langle 0,0,0 \rangle$이라 가정할 수 있다.

이제 Lagrange 승수법을 이용하기 위하여, $\nabla f = \lambda \nabla g$ 과 제약조건을 만족하는 점을 구해보자: $2x = \lambda yz^2$, $2y = \lambda xz^2$, $2z = 2\lambda xyz$, $xyz^2 = 8$ (5점)

우선, 제약조건으로부터 $xyz \neq 0$, $xy > 0$ 임에 유의하자.

$$\begin{cases} 2x = \lambda yz^2 \\ 2y = \lambda xz^2 \\ 2z = 2\lambda xyz \\ xyz^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = \lambda xyz^2 \\ 2y^2 = \lambda xyz^2 \\ 1 = \lambda xy \\ xyz^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = z^2 \\ 2y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \ (\because \ xy > 0)$$ (7점)

$x = y, xyz^2 = 8, 2x^2 = z^2$을 풀어보면 네 점 $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 2), (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, -2)$을 얻게 된다. 이 점들에서 f의 함수값은 8이다. (9점)
이 값이 최소가 되는 것인지 확인하기 위해서 제약조건위의 한 점 $(4,2,1)$에서 함수값을 계산해보면 21이 된다. 따라서 위에서 구한 점들에서 최소거리 $2\sqrt{2}$을 갖게 됨을 알 수 있다. (10점)

13.

평면 $z=2$의 위쪽에 놓인 포물면의 xy평면 위로의 사영 영역을 다음과 같이 구할 수 있다.

$4-x^2-y^2=z\geq 2$이므로 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2\}$이다. (2점)

따라서 곡면의 넓이는

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

$$S=\iint_{x^2+y^2\leq 2} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy \qquad (4점)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

(6점)

$$=2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi \qquad (10점)$$

14.

주어진 입체의 xy평면 위로의 사영 영역을 구하자.

$D = \{(x,y) | x^2 + (y-1)^2 \le 1\} = \{(r,\theta) | 0 \le r \le 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi\}$.

따라서

주어진 입체의 부피는

$$V = 2\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\ dA \qquad \text{(3점)}$$

이것을 주면좌표로 표현하고, 또한 대칭성에 의하여

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\theta}\sqrt{4-r^2}\,rdrd\theta \qquad \text{(5점)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-4}{3}(4-r^2)^{3/2}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\left[\theta - \sin\theta + \frac{1}{3}sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9}$$

(10점)

15.

영역을 구면좌표계로 표현하면

$x^2+y^2+z^2-2z+1 \le 1 \Rightarrow \rho \le 2\cos\phi$,

$z \ge 2\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \tan\phi \le \frac{1}{2}$

$0 \le \theta \le 2\pi$ (3점)

따라서 구하고자 하는 부피는

$$V=\int_0^{\tan^{-1}\frac{1}{2}}\int_0^{2\cos\phi}\int_0^{2\pi}\rho^2\sin\phi\, d\theta\, d\rho\, d\phi$$ (5점)

$$=2\pi\int_0^{\tan^{-1}\frac{1}{2}}\frac{8}{3}cos^3\phi\sin\phi d\theta$$

$$=2\pi\left[-\frac{8}{12}cos^4\theta\right]_0^{\tan^{-1}\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left(1-(\frac{4}{5})^2\right)=\frac{12\pi}{25}$$

(10점)