

2009학년도 1학기 일반수학 기말고사

단답식 답안지

1. $x \geq e$ 또는 $[e, \infty)$

2. $\frac{1}{5}$

3. $\frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$

4. $\frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1) = \frac{1}{2} e \sin 1 - \frac{1}{2} e \cos 1 + \frac{1}{2}$

5. $\frac{1}{24}$

6. $\frac{3}{4} \pi$

7. 발산

8. 절대수렴

9. $-(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{2^2}{3!} x^3 + \frac{2^4}{5!} x^5 - \frac{2^6}{7!} x^7 + \dots$

주관식 답안지

11. 모든 실수 x 에 대해

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \tan^{-1}x \text{ 임을 증명하여라.}$$

[풀이] $\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$ [4점]

$$= \sqrt{1+x^2} \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+x^2}$$
$$= \frac{d}{dx}\tan^{-1}x \quad [7점]$$

따라서 $\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \tan^{-1}x + C$ (*) 여기서 C 는 상수이다.

이 상수를 구하기 위해 위 식 (*)에 $x=0$ 을 대입하면

$$\sin^{-1}(0) = \tan^{-1}(0) + C \text{ 즉 } 0 = 0 + C \text{ 이므로}$$

$$C=0 \text{이다. 따라서 } \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \tan^{-1}x \quad [10점]$$

12. 부정적분 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x(e^{2x}+1)}dx$ 를 구하여라.

[풀이] $u := e^x$ 라 두면 $du = e^x dx = u dx$ 이므로

주어진 적분은 $\int \frac{u^3+1}{u^2(u^2+1)}du$ 이다. [2점]

부분분수분해를 구하기 위해 피적분함수를 다음과 같이 표현하자.

$$\frac{u^3+1}{u^2(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{Cu+D}{u^2+1}$$

이로부터 $A+C=1, B+D=0, A=0, B=1$ 을 얻어

$A=0, B=1, C=1, D=-1$ 을 구한다.

따라서

$$\frac{u^3+1}{u^2(u^2+1)} = \frac{1}{u^2} + \frac{u-1}{u^2+1} \quad [5점]$$

$$= \frac{1}{u^2} + \frac{1}{2} \frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+1}$$

이제 주어진 적분 $= \int \frac{1}{u^2} du + \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} du - \int \frac{1}{u^2+1} du$

$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{2} \ln(u^2+1) - \tan^{-1}u + C \quad [9점]$$

$$= -e^{-x} + \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) - \tan^{-1}e^x + C \quad \text{이다.} [10점]$$

13. 특이적분 $\int_1^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$ 가 수렴하는 실수 α 의 범위를 구하여라.

[풀이] 모든 $x \geq 1$ 에 대해 부등식 $x^2 \leq 1+x^2 \leq 2x^2$ 이 성립한다.

이 부등식의 역수를 취하면 다음의 부등식을 얻는다:

$$\frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

이로부터 모든 $x \geq 1$ 에 대해, $\frac{x^\alpha}{2x^2} \leq \frac{x^\alpha}{1+x^2} \leq \frac{x^\alpha}{x^2}$ (*)이 얻어진다.

이제 폐구간 $[1, m]$ 위에서 위 부등식 (*)을 적분하면 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$\int_1^m \frac{x^\alpha}{2x^2} dx \leq \int_1^m \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx \leq \int_1^m \frac{x^\alpha}{x^2} dx \quad (**) \text{ [4점]}$$

만약 $2-\alpha > 1$, 즉, $\alpha < 1$ 이면 $m \rightarrow \infty$ 에 따라 (**)의 맨 오른쪽 정적분

$$\int_1^m \frac{x^\alpha}{x^2} dx = \frac{1}{\alpha-1} x^{\alpha-1} \Big|_1^m = \frac{1}{\alpha-1} (m^{\alpha-1} - 1)$$

는 수렴한다. [6점]

한편 $\alpha > 1$ 이면 $m \rightarrow \infty$ 에 따라 (**)의 맨 왼쪽 정적분

$$\int_1^m \frac{x^\alpha}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^m \frac{x^\alpha}{x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha-1} x^{\alpha-1} \Big|_1^m = \frac{1}{2(\alpha-1)} (m^{\alpha-1} - 1)$$

따라서 주어진 특이적분은 발산한다. [7점]

마지막으로 $\alpha = 1$ 일 때

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(1+m^2) = \infty$$

주어진 특이적분은 발산한다. [9점]

그러므로 $\alpha < 1$ 일 때만 주어진 특이적분은 수렴한다. [10점]

14. 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n(x-3)^n}{n^2}$ 의 수렴 반지름과 수렴구간을 구하여라.

[풀이] 주어진 멱급수의 일반항을 u_n 라 두면

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-5)^{n+1}(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{(-5)^n(x-3)^n} \right| \\ &= 5|x-3| \text{ 이다.} \end{aligned}$$

이로부터 수렴반경 R 은 $R = \frac{1}{5}$ 이다. [4점]

만약 $\rho < 1$, 즉 $|x-3| < \frac{1}{5}$ 이면 주어진 멱급수는 (절대)수렴한다.

먼저

(i) $x-3 = \frac{1}{5}$ 일 때 주어진 멱급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 이고 이는 (절대)수렴한다. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

는 $p=2 > 1$ 인 p-급수이므로). 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 는 수렴한다. 또는

교대급수 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 는 수렴함을 확인할 수 있다. [6점]

(ii) $x-3 = -\frac{1}{5}$ 일 때 주어진 멱급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 이고 이는 $p=2 > 1$ 인 p-급수이므로

로 수렴한다. [8점]

따라서 수렴구간은 폐구간 $[\frac{14}{5}, \frac{16}{5}]$ 이다. [10점]

15. 함수 $f(x) = x^2 2^x$ 의 n -번째 도함수를 $f^{(n)}(x)$ 로 나타낼 때, $f^{(5)}(0)$ 의 값을 구 하여라.

[풀이] 두 가지 방법으로 보일 수 있다.

먼저 주어진 함수를 5번 계속해서 미분해서 다음과 같이 구할 수 있다.

권고사항: 채점시 최종적인 답이 맞더라도 연산실수에 따른 적절한 감점을 적용하 기 바랍니다.

$$f(x) = x^2 2^x$$

$$f'(x) = 2x 2^x + x^2 2^x \ln 2$$

$$f^{(2)}(x) = 2 2^x + (4 \ln 2)x 2^x + x^2 2^x (\ln 2)^2$$

$$f^{(3)}(x) = 6 \ln 2 2^x + 6 (\ln 2)^2 x 2^x + x^2 2^x (\ln 2)^3 \quad [4점]$$

$$f^{(4)}(x) = 12 (\ln 2)^2 2^x + 8 (\ln 2)^3 x 2^x + x^2 2^x (\ln 2)^4$$

$$f^{(5)}(x) = 20 (\ln 2)^3 2^x + 10 (\ln 2)^4 x 2^x + x^2 2^x (\ln 2)^5 \quad [8점]$$

따라서 $f^{(5)}(0) = 20 (\ln 2)^3$ 이다. [10점]

다른 방법으로 테일러 급수를 이용해서 다음과 같이 구할 수 있다

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 의 근방에서 테일러 급수를 가지면

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{로 주어진다.}$$

모든 실수 x 에 대해, 함수 e^x 는 테일러 급수

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (*) \text{을 가짐을 알고 있다.}$$

(*)에서 변수변환 $x \rightarrow \ln 2 x$ 을 이용하여

함수 $f(x) = x^2 2^x = x^2 e^{x \ln 2}$ 는 다음의 테일러 급수를 가진다: [3점]

$$f(x) = x^2 2^x = x^2 e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^{n+2}. \quad [7점]$$

이로부터 $\frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} = \frac{(\ln 2)^n}{n!} (n \geq 0)$ 이 나오고

$$f^{(n+2)}(0) = (n+2)(n+1)(\ln 2)^n \text{ 이 얻어진다.}$$

따라서 $f^{(5)}(0) = 20 (\ln 2)^3$ 이다. [10점]