# 2009학년도 1학기 일반수학 기말고사

## 단답식 답안지

1. $x \geq e$ 또는 $[e, \infty)$

2. $\frac{1}{5}$

3. $\frac{1}{2} sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$

4. $\frac{1}{2}(e\sin 1 - e\cos 1 + 1) = \frac{1}{2} e\sin 1 - \frac{1}{2} e\cos 1 + \frac{1}{2}$

5. $\frac{1}{24}$

6. $\frac{3}{4}\pi$

7. 발산

8. 절대수렴

9. $-(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 - \frac{2^6}{7!}x^7 + \cdots$

# 주관식 답안지

11. 모든 실수 $x$에 대해

$\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = \tan^{-1}x$ 임을 증명하여라.

[풀이] $\frac{d}{dx}sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})'$ [4점]

$$= \sqrt{1+x^2}\,\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{d}{dx}tan^{-1}x$$ [7점]

따라서 $\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = \tan^{-1}x + C$ (*) 여기서 $C$는 상수이다.

이 상수를 구하기 위해 위 식 (*)에 $x=0$을 대입하면

$\sin^{-1}(0) = \tan^{-1}(0) + C$ 즉 $0 = 0 + C$ 이므로

$C=0$이다. 따라서 $\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = \tan^{-1}x$ [10점]

12. 부정적분 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x(e^{2x}+1)}dx$를 구하여라.

[풀이] $u := e^x$ 라 두면 $du = e^x dx = u dx$이므로

주어진 적분은 $\int \frac{u^3+1}{u^2(u^2+1)}du$ 이다. [2점]

부분분수분해를 구하기 위해 피적분함수를 다음과 같이 표현하자.

$$\frac{u^3+1}{u^2(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{Cu+D}{u^2+1}$$

이로부터 $A+C=1,\ B+D=0, A=0, B=1$을 얻어

$A=0, B=1, C=1, D=-1$을 구한다.

따라서

$$\frac{u^3+1}{u^2(u^2+1)} = \frac{1}{u^2} + \frac{u-1}{u^2+1} \quad [5점]$$

$$= \frac{1}{u^2} + \frac{1}{2}\frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+1}$$

이제 주어진 적분 $= \int \frac{1}{u^2}du + \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du - \int \frac{1}{u^2+1}du$

$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{2}ln(u^2+1) - \tan^{-1}u + C \quad [9점]$$

$$= -e^{-x} + \frac{1}{2}ln(e^{2x}+1) - \tan^{-1}e^x + C$$ 이다.[10점]

13. 특이적분 $\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx$ 가 수렴하는 실수 $\alpha$의 범위를 구하여라.

[풀이] 모든 $x \ge 1$에 대해 부등식 $x^2 \le 1+x^2 \le 2x^2$ 이 성립한다.
이 부등식의 역수를 취하면 다음의 부등식을 얻는다:

$$\frac{1}{2x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

이로부터 모든 $x \ge 1$에 대해, $\frac{x^\alpha}{2x^2} \le \frac{x^\alpha}{1+x^2} \le \frac{x^\alpha}{x^2}$ (*)이 얻어진다.

이제 폐구간 $[1,m]$위에서 위 부등식 (*)을 적분하면 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$\int_1^m \frac{x^\alpha}{2x^2}dx \le \int_1^m \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx \le \int_1^m \frac{x^\alpha}{x^2}dx \qquad (**)\ [4점]$$

만약 $2-\alpha > 1$,즉, $\alpha < 1$이면 $m \to \infty$에 따라 (**)의 맨 오른쪽 정적분 $\int_1^m \frac{x^\alpha}{x^2}dx = \frac{1}{\alpha-1}x^{\alpha-1}\Big|_1^m = \frac{1}{\alpha-1}(m^{\alpha-1}-1)$는 수렴한다. 따라서 주어진 특이적분은 수렴한다. [6점]

한편 $\alpha > 1$이면 $m \to \infty$에 따라 (**)의 맨 왼쪽 정적분

$\int_1^m \frac{x^\alpha}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^m \frac{x^\alpha}{x^2}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha-1}x^{\alpha-1}\Big|_1^m = \frac{1}{2(\alpha-1)}(m^{\alpha-1}-1)$는 발산한다.

따라서 주어진 특이적분은 발산한다. [7점]

마지막으로 $\alpha = 1$일 때

$$\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{m\to\infty}\int_1^m \frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}ln(1+m^2) = \infty$$ 이므로

주어진 특이적분은 발산한다. [9점]

그러므로 $\alpha < 1$ 일 때만 주어진 특이적분은 수렴한다. [10점]

14. 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n(x-3)^n}{n^2}$의 수렴 반지름과 수렴구간을 구하여라.

[풀이] 주어진 멱급수의 일반항을 $u_n$라 두면

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-5)^{n+1}(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{(-5)^n(x-3)^n}\right|$$
$$=5|x-3| \text{ 이다.}$$

이로부터 수렴반경 $R$은 $R=\frac{1}{5}$이다.[4점]

만약 $\rho<1$, 즉 $|x-3|<\frac{1}{5}$이면 주어진 멱급수는 (절대)수렴한다.

먼저

(i) $x-3=\frac{1}{5}$일 때 주어진 멱급수는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$이고 이는 (절대)수렴한다($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$는 $p=2>1$인 p-급수이므로). 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$는 수렴한다. 또는 교대급수 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$는 수렴함을 확인할 수 있다. [6점]

(ii) $x-3=-\frac{1}{5}$ 일 때 주어진 멱급수는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$이고 이는 $p=2>1$인 p-급수이므로 수렴한다. [8점]

따라서 수렴구간은 폐구간 $[\frac{14}{5}, \frac{16}{5}]$ 이다. [10점]

15. 함수 $f(x)=x^2 2^x$의 $n$-번째 도함수를 $f^{(n)}(x)$로 나타낼 때, $f^{(5)}(0)$의 값을 구하여라.

[풀이] 두 가지 방법으로 보일 수 있다.

먼저 주어진 함수를 5번 계속해서 미분해서 다음과 같이 구할 수 있다.

권고사항: 채점시 최종적인 답이 맞더라도 연산실수에 따른 적절한 감점을 적용하기 바랍니다.

$f(x)=x^2 2^x$

$f'(x)=2x2^x+x^2 2^x \ln 2$

$f^{(2)}(x)=22^x+(4\ln 2)x2^x+x^2 2^x(\ln 2)^2$

$f^{(3)}(x)=6\ln 2\, 2^x+6(\ln 2)^2 x2^x+x^2 2^x(\ln 2)^3$ [4점]

$f^{(4)}(x)=12(\ln 2)^2 2^x+8(\ln 2)^3 x2^x+x^2 2^x(\ln 2)^4$

$f^{(5)}(x)=20(\ln 2)^3 2^x+10(\ln 2)^4 x2^x+x^2 2^x(\ln 2)^5$ [8점]

따라서 $f^{(5)}(0)=20(\ln 2)^3$이다. [10점]

다른 방법으로 테일러 급수를 이용해서 다음과 같이 구할 수 있다

함수 $f(x)$가 $x=a$의 근방에서 테일러 급수를 가지면

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$로 주어진다.

모든 실수 $x$에 대해, 함수 $e^x$는 테일러 급수

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \quad (*)$$을 가짐을 알고 있다.

(*)에서 변수변환 $x \to \ln 2\, x$을 이용하여

함수 $f(x)=x^2 2^x=x^2 e^{x\ln 2}$는 다음의 테일러 급수를 가진다: [3점]

$$f(x)=x^2 2^x=x^2 e^{x\ln 2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^{n+2}.$$ [7점]

이로부터 $\dfrac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}=\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}\ (n \ge 0)$이 나오고

$f^{(n+2)}(0)=(n+2)(n+1)(\ln 2)^n$ 이 얻어진다.

따라서 $f^{(5)}(0)=20(\ln 2)^3$이다. [10점]