1. $[-2,1)\cup(1,2]$

2. $\dfrac{2}{3}$

3. $y'' = \dfrac{-6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3} = \dfrac{-6}{(x+2y)^3}$

4. $1+\dfrac{1}{2}x$

5. $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}}$

6. $\dfrac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

7. $\dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

8. $2x\cos(x^2)$

9. 18

10. $\dfrac{4\pi}{15}$

11. 방정식 $x^5+x^3+x-1=0$ 은 단 한 개의 실근을 가짐을 증명하여라.

풀이) $f(x)=x^5+x^3+x-1$ 이라 하자. 그러면 $f(0)=-1<0<f(1)=2$ 이고, f 는 구간 $[0,1]$에서 연속이므로 중간값 정리에 의해서 $f(x)$ 는 구간 $[0,1]$에서 적어도 하나의 0 을 갖는다. 그러나 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$$

이므로, f 는 실수 전체에서 증가한다. 따라서 방정식 $x^5+x^3+x-1=0$ 은 단 한 개의 실근을 갖는다.

12. 한 변의 길이가 L인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 h인 각뿔의 부피를 구하여라.

풀이) 각뿔의 꼭지점을 원점에 놓고 $x-$축을 중심축으로 택하자.

점 x를 지나면서 $x-$축에 수직인 단면적 $A(x)=\dfrac{L^2x^2}{h^2}$ 이므로

각뿔의 부피는

$$V=\int_0^h A(x)\,dx=\int_0^h \frac{L^2x^2}{h^2}\,dx=\frac{L^2h}{3}\ .$$

13. 반지름이 3인 구의 내부에 직원뿔을 내접시킨다고 할 때, 직원뿔의 최대 부피를 구하라.

풀이) 내접한 직원뿔의 부피는

$V=\dfrac{\pi}{3}x^2(y+3)$ 이고 $x^2+y^2=3^2$ 이므로

$V=\dfrac{\pi}{3}(9-y^2)(y+3)$ 이다.

$V'=-\pi(y-1)(y+3)$ 이므로

$y=1$일 때 최대부피 $V=\dfrac{32\pi}{3}$가 된다.

14. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0,1]$ 에서 정의된 연속 함수라 하자. 만일 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ 이면, $f(c)=0$인 점 c가 $[0,1]$안에 존재함을 증명하여라.

풀이) 구간 $[0,1]$ 에서 함수 $f(x)$의 평균값 $\overline{y}$ 는

$$\overline{y}=\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx=0 \text{ 이다.}$$

함수 $f(x)$가 구간 $[0,1]$에서연속이므로, 적분에 관한 평균값 정리에 의해서, $f(c)=0$인 점 c가 $[0,1]$안에 존재한다.

15. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-4}{x^2}$ 의 그래프의 개형(변곡점 포함)을 그려라.

풀이)

1. x절편: $-1\pm\sqrt{5}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-4}{x^2}=1$ 로부터 수평점근선은 $y=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-4}{x^2}=-\infty$이므로 수직점근선은 $x=0$

3. $f'(x)=2\left(\dfrac{4-x}{x^3}\right)$

구간 $(-\infty,0)$에서 감소, $(0,4]$에서 증가, $[4,\infty)$에서 감소

4. $f(4)=\dfrac{4}{5}$는 최대값

5. $f''=4\left(\dfrac{x-6}{x^4}\right)$

$(-\infty,0)$ 과 $(0,6)$에서 아래로 오목, $(6,\infty)$에서 위로오목

변곡점: $(6,\dfrac{11}{9})$