1. 수렴

2. 수렴

3. 발산

4. 극좌표 $(6, \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi)$, 직교좌표 $(1, \sqrt{3}\,)$

5. $xy = 1$

6. $\dfrac{19}{3}$

7. $7x - 5y - 4z = 6$

8. $1 - \dfrac{2x^2}{2!} + \dfrac{2^3 x^4}{4!} - \dfrac{2^5 x^6}{6!} + \cdots$

9. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. 2

11. 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 은 $p>1$ 이면 수렴하고, $p \le 1$ 이면 발산함을 보이시오.

풀이: 함수 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ 는 $x \ge 2$ 에서 연속이고 감소함수이다.

적분판정법에 의해서 주어진 급수와 특이적분 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$ 는 모두 수렴하거나, 또는 모두 발산한다. 그런데 특이적분 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^p}\,dt$ 는 $p>1$ 이면 수렴하고, $p \le 1$ 이면 발산한다. 따라서 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 은 $p>1$ 이면 수렴하고, $p \le 1$ 이면 발산한다.

12. 두 평면 $x+y+z=1$ 과 $x-2y+3z=1$이 만나서 이루는 교선의 대칭방정식을 구하시오.

풀이: 교선위에 있는 한 점을 구하기 위해 $z=0$ 을 평면의 방정식에 대입하면
$x+y=1$, $x-2y=1$ 이 되고, 이 연립 방정식을 풀면 $x=1$, $y=0$ 이다.
따라서 점 $P(1,0,0)$은 교선위에 있다.
두 평면의 법선 벡터 $n=\langle 1,1,1\rangle$, $m=\langle 1,-2,3\rangle$의 벡터곱은 교선과 평행인 벡터가 된다. 점 $P(1,0,0)$을 지나고 벡터 $n\times m=\langle 5,-2,-3\rangle$에 평행인 교선의 대칭방정식은 $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{-3}$ 이다.

13. 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n}}$ 의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

풀이: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\dfrac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)\sqrt{n}}{3\sqrt{n+1}}\right| = \frac{|x-1|}{3}$ 이다. 비판정법에 의해서 주어진 급수는 $\dfrac{|x-1|}{3} < 1$, 즉 $|x-1| < 3$ 일 때 수렴하므로 수렴반경은 3이다.

$x=-2$ 이면 급수는 수렴하는 교대급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 이고

$x=4$ 이면 급수는 발산하는 p-급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 이므로

수렴구간은 $[-2, 4)$ 이다.

14. $r=3\sin\theta$ 의 내부와 $r=1+\sin\theta$ 의 외부로 이루어진 영역의 넓이를 구하시오.

풀이: 두 곡선은 $3\sin\theta = 1+\sin\theta$ 일 때, 즉 $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$ 일 때 만난다.

구하려고 하는 넓이는 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 에서 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 까지의 $r=3\sin\theta$ 의 내부영역의 넓이에서, $\theta=\frac{\pi}{6}$ 에서 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 사이의 $r=1+\sin\theta$ 의 내부영역의 넓이를 빼면 구해진다.

따라서

$$A=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(3\sin\theta)^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(1+\sin\theta)^2\,d\theta \quad \text{이다.}$$

영역이 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 에 대해서 대칭이므로

$$A=2\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin\theta)^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)^2\,d\theta\right]$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(8\sin^2\theta-1-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(3-4\cos 2\theta-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\left[3\theta-2\sin 2\theta+2\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

15. 곡선 $r = 4\sin\theta$ 를 $x-$축을 중심으로 회전시킬 때 얻어지는 곡면의 넓이를 구하시오.

풀이: 극 방정식 $r = 4\sin\theta$ 를 직교방정식으로 바꾸면 원 $x^2 + (y-2)^2 = 2^2$ 이 되고 θ의 범위는 0 에서 π 까지임을 알 수 있다.

그리고

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \sqrt{(4\cos\theta)^2 + (4\sin\theta)^2}\, d\theta = 4\, d\theta \text{ 이다.}$$

따라서 구하려는 곡면의 넓이는

$$A = \int_0^{\pi} 2\pi y\, ds = \int_0^{\pi} 2\pi r \sin\theta\, ds$$

$$= \int_0^{\pi} 2\pi (4\sin\theta)\sin\theta\, (4\, d\theta) = 32\pi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 16\pi \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= 16\pi^2$$